# Géométrie de l'espace d'Urysohn et théorie descriptive des ensembles

Julien Melleray

**Thèse de Doctorat de l'Université Paris VI**

Spécialité

**Mathématiques**

présentée par

# Julien Melleray

pour obtenir le grade de Docteur de l'Université Paris VI

# Géométrie de l'espace d'Urysohn et théorie descriptive des ensembles

Soutenue le 2 décembre 2005 devant le jury composé de :

| | |
|---|---|
| **M. Jean-Yves Chemin** | Examinateur |
| **M. Gilles Godefroy** | Examinateur |
| **M. Gilles Lancien** | Rapporteur |
| **M. Alain Louveau** | Examinateur |
| **M. Vladimir Pestov** | Rapporteur |
| **M. Jean Saint Raymond** | Directeur de thèse |

*Cette thèse a été réalisée au sein de l'Equipe d'Analyse Fonctionnelle de l'Université Paris 6. Je remercie Jean Saint Raymond d'en avoir assuré la direction avec une grande disponibilité.*
*Je suis très reconnaissant à Vladimir Pestov et Gilles Lancien d'avoir accepté d'écrire un rapport sur mon travail. Je les remercie, ainsi que MM. Jean-Yves Chemin, Gilles Godefroy, et Alain Louveau, de l'honneur qu'ils me font en participant au jury.*
*Je remercie tous les membres de l'Equipe d'Analyse Fonctionnelle, qui m'ont permis de bénéficier d'excellentes conditions de travail. En particulier, mes recherches ont été grandement facilitées, et ma culture (mathématique, mais pas uniquement) enrichie, par plusieurs conversations avec Gilles Godefroy, dont la disponibilité et la gentillesse m'ont été d'un grand soutien.*
*Je suis également redevable aux membres du groupe de travail en théorie descriptive des ensembles, en particulier Gabriel Debs, Valentin Ferenczi, Dominique Lecomte et Alain Louveau ; j'ai beaucoup appris grâce à eux, et leurs remarques et suggestions m'ont beaucoup aidé.*
*Mes travaux ont grandement bénéficié d'une conversation avec Vladimir Pestov au CIRM en 2004, puis d'un échange de messages électroniques avec lui ; des remarques et commentaires d'Alekos Kechris et Nigel Kalton échangés par le même médium m'ont également été très utiles. Qu'ils soient tous trois remerciés ici pour leur aide généreuse.*
*Je dois enfin d'infinis remerciements à mes parents et amis pour m'avoir supporté/toléré/diverti/soutenu (selon les personnes, et selon les périodes...) au cours de ces années de thèse. Ce n'est pas ici le lieu de les nommer tous ; je vais donc me cantonner aux remerciements mathématiques, aux titres desquels je dois tout d'abord mentionner Thierry Monteil : d'abord pour les nombreuses conversations qui m'ont conduit à m'intéresser à la topologie, mais aussi pour avoir éveillé mon intérêt pour l'espace d'Urysohn, m'avoir poussé à étudier sa géométrie, et avoir échangé avec moi de nombreuses idées. Cette thèse lui doit beaucoup. Plusieurs conversations avec Mathieu Florence m'ont aussi aidé à mieux comprendre comment aborder certains des problèmes étudiés ici ; je lui en suis très reconnaissant.*

# TABLE DES MATIÈRES

# INTRODUCTION

Comme son titre l'indique, cette thèse traite principalement de deux sujets : la géométrie d'un espace polonais remarquable (l'espace d'Urysohn), ainsi que certains aspects de la théorie descriptive des ensembles, en particulier les *problèmes de classification*. On étudie ici la géométrie de l'espace d'Urysohn pour elle-même, mais aussi comme un moyen d'obtenir des résultats de nature descriptive ; pour pouvoir expliquer cela plus précisément, commençons par détailler ce qu'on entend par "problèmes de classification", et pourquoi l'espace d'Urysohn intervient naturellement dans l'étude de certains de ces problèmes.
Ici, on se contente d'expliquer très brièvement les enjeux de cette théorie ; la présentation ci-dessous est particulièrement inspirée de [GaKe]. Le lecteur pourra trouver plus d'explications et d'informations, et des références bibliographiques supplémentaires, dans [BK1], [GaKe], ou [Hj].

## (A) *Problèmes de classification.*

Sous l'appellation "problèmes de classification", on englobe une vaste classe de problèmes rencontrés en mathématiques : classifier des objets, à une notion d'équivalence près, en attribuant à chaque classe d'équivalence un invariant (i.e. deux objets sont équivalents si, et seulement si, on leur a associé le même invariant).
Pour pouvoir appliquer les méthodes de la théorie descriptive des ensembles, il faut que la classe d'objets considérée forme une partie "définissable" (borélienne, analytique...) d'un espace borélien standard $X$, et que la relation associée (vue dans $X \times X$) soit également définissable. Dans cette thèse, on ne considère que des relations d'équivalence analytiques sur un borélien standard.
Une fois qu'on a "codé" convenablement la relation considérée, de nombreux problèmes rentrent dans ce cadre, en particulier ceux qui correspondent à "étudier l'isomorphisme entre certaines classes de structures" (la formulation est volontairement très vague) ; par exemple, on peut étudier l'isomorphisme entre diverses classes de groupes, l'isomorphisme entre graphes dénombrables, l'isométrie ou l'homéorphisme entre diverses classes d'espaces polonais, l'iso-

morphisme entre espaces de Banach séparables...
Un des problèmes est de définir quels invariants on s'autorise (si on a le droit d'associer comme invariant d'une classe d'équivalence la classe elle-même, alors le problème n'a pas grand intérêt !), mais aussi quelle complexité peut avoir la fonction qui associe les invariants aux éléments du domaine de la relation d'équivalence ; il est raisonnable de demander que celle-ci soit "définissable", c'est-à-dire qu'on puisse "calculer" les invariants.
Si $E$ est une relation d'équivalence définissable sur un borélien standard $X$, la situation la plus simple est alors celle où l'on peut assigner comme invariants des réels de façon borélienne, c'est-à-dire quand on peut trouver une application borélienne $f\colon X \to \mathbb{R}$ telle que

$$(xEy) \Leftrightarrow (f(x) = f(y)) \ .$$

On dit alors que la relation est *concrètement classifiable* ; un exemple non trivial de relation concrètement classifiable est la relation d'isométrie entre espaces métriques compacts (Gromov, [Gr]).
On ne peut pas toujours produire de tels invariants ; par exemple, la construction de Vitali d'un sous-ensemble de $\mathbb{R}$ non-mesurable s'interprète, dans ce cadre, en disant que la relation d'équivalence $E$ sur $\mathbb{R}$ définie par

$$(xEy) \Leftrightarrow (x - y \in \mathbb{Q})$$

n'est pas concrètement classifiable.
On peut alors s'autoriser des ensembles d'invariants plus compliqués, par exemple des ensembles dénombrables de réels, etc. ; mais il n'y a pas d'intérêt à classifier une relation simple avec des invariants très complexes.
Le problème devient donc le suivant : étant donnée une relation d'équivalence, quel est le "meilleur" ensemble d'invariants que l'on peut utiliser pour la classifier ?
Posé ainsi, ce problème n'a pas un sens mathématique très clair ; il faut donner une façon de dire quand un problème de classification est plus simple qu'un autre. Intuitivement, un problème $E$ est plus simple qu'un problème $E'$ quand la donnée d'une classification de $E'$ permet d'obtenir une classification de $E$.
Formellement, on dit qu'une relation d'équivalence $E$ sur un espace borélien standard $X$ *se réduit boréliennement* à la relation $E'$ définie sur le borélien standard $X'$ s'il existe une application borélienne $f\colon X \to X'$ telle que

$$(xEy) \Leftrightarrow (f(x)E'f(y))$$

Cette notion correspond bien à l'idée intuitive que "$E$ est plus simple que $E'$" : quitte à composer par $f$, tout système d'invariants qui permet de classifier $E'$ permet également de classifier $E$.

On note $E \leq_B E'$ si $E$ se réduit boréliennement à $E'$, et $E \sim_B E'$ si $E$ et $E'$ se réduisent boréliennement l'une à l'autre (autrement dit, les problèmes de classification associés ont la même complexité).
La relation $\leq_B$ induit une hiérarchie de complexité sur les problèmes de classification ; diverses relations ont déjà été bien étudiées, et on peut s'en servir pour évaluer la complexité d'un problème de classification donné.
Dans cette thèse, nous serons confrontés en particulier à des relations induites par une action borélienne d'un groupe polonais $G$ sur un espace métrique polonais $X$ ; ces relations sont toutes analytiques, et leurs classes d'équivalence sont boréliennes.
Les exemples non-triviaux (i.e. non concrètement classifiables) les plus simples sont fournis par certaines actions de $\mathbb{Z}$, muni de la topologie discrète (cf. [DJK]) ; il est déjà plus compliqué (en général !) de faire agir un groupe dénombrable quelconque $G$ sur l'espace de Cantor $2^G$ par shift (i.e. $g.x(h) = x(g^{-1}h)$) (cf. [JKL]). Il existe des relations encore plus complexes, qui ne se réduisent à aucune relation induite par une action borélienne de groupe dénombrable ; l'isomorphisme entre graphes en est un exemple.
Et il existe encore des relations plus complexes : nous verrons plus bas que l'isométrie entre espaces polonais rentre dans ce cadre, et ne se réduit pas à l'isomorphisme entre graphes dénombrables (loin de là !). Le lecteur pourra consulter par exemple [BK1] et [BK2] pour plus d'informations sur les actions boréliennes de groupe polonais.
Un aspect fondamental de cette théorie est le suivant : parmi les relations induites par un groupe polonais donné $G$, il existe toujours une relation universelle $E_G^\infty$, qui est unique à $\sim_B$ près ; autrement dit, toute relation induite par une action borélienne de $G$ se réduit boréliennement à $E_G^\infty$.
Par exemple, la relation d'isomorphisme entre graphes dénombrables (cf. le chapitre 5 pour voir pourquoi elle rentre dans le cadre décrit ici) est la relation universelle pour les actions boréliennes de $S_\infty$ (le groupe des permutations de $\mathbb{N}$, muni de sa topologie naturelle).
Ici, dans le prolongement de [GaKe], on s'intéresse tout particulièrement à des problèmes de classification de nature géométrique. Pour expliquer cela plus en détail, quelques rappels généraux sont nécessaires.

## (B) ***Notations, définitions, et rappels.***

Rappelons qu'un espace métrique $(X, d)$ est dit *polonais* s'il est complet et séparable. Dans la suite, quand il n'y a pas de confusion possible, on omet $d$ et on dit simplement que $X$ est un espace métrique polonais.
Dans ce texte, les lettres $X$, $Y$ désigneront des espaces métriques séparables. S'il existe une distance sur $X$ qui en fait un métrique polonais, alors on dit

que la topologie de $X$ est polonaise.
On appelle *espace borélien standard* tout couple $(B, \Sigma)$, où $B$ est un ensemble et $\Sigma$ une $\sigma$-algèbre sur $B$ qui est isomorphe à la $\sigma$-algèbre formée par les boréliens de $[0, 1]$ (tout polonais non dénombrable muni de la structure borélienne induite par sa topologie rentre dans ce cadre, cf. [Ke1]).
Si $X$ est polonais, on désigne par $\mathcal{F}(X)$ l'ensemble des fermés de $X$, et on le munit de la structure borélienne d'Effros (cf. [Ch] ou [Ke1]), qui est la tribu engendrée par les ensembles de la forme $\{F \in \mathcal{F}(X) \colon F \cap U \neq \emptyset\}$, où $U$ parcourt les ouverts de $X$. Muni de cette structure, $\mathcal{F}(X)$ est un espace borélien standard dès que $X$ est infini.
La plupart de nos raisonnements sont de nature métrique ; pour éviter les confusions, on appelle *application isométrique* (ou *plongement isométrique*) toute application $f \colon X \to Y$ telle que $d(f(x), f(x')) = d(x, x')$ pour tous $x, x' \in X$. Si $f$ est bijective, on dit que $f$ est une *isométrie*.
On dit qu'un groupe topologique $G$ est un *groupe polonais* si la topologie de $G$ est polonaise ; il n'existe pas nécessairement de distance complète invariante pour l'action par translation (à gauche, par ex.) de $G$ sur lui même. On pourra se reporter à [BK1] ou [Ke1] pour une introduction complète à la théorie des groupes polonais, ainsi qu'une bibliographie sur le sujet.
Dans la suite, nous allons en particulier nous intéresser aux groupes d'isométries : si $X$ est un espace métrique séparable, appelons $Iso(X)$ son groupe d'isométries, et munissons la de la topologie de la convergence simple. On vérifie que celle-ci coïncide avec la topologie compacte ouverte (ou de cvu sur les compacts) et fait de $Iso(X)$ un groupe topologique à base dénombrable d'ouverts (et donc métrisable).
Dans le cas où $X$ est polonais, on vérifie en outre que $Iso(X)$, muni de cette topologie, est un groupe polonais.

### (C) *L'espace d'Urysohn et ses applications en théorie descriptive.*

Si $X$ est un espace métrique polonais, alors $Iso(X)$ agit naturellement sur $X$ par translation à gauche ($\varphi.x = \varphi(x)$), mais aussi sur $\mathcal{F}(X)$, avec la formule

$$\varphi.F = \varphi(F) \ .$$

Cette action est borélienne, la relation associée est donc analytique. Si on s'intéresse ici à ces actions en particulier, c'est parce qu'elles sont naturelles mais assez générales (Gao et Kechris ont prouvé dans [GaKe] que tout groupe polonais est isomorphe au groupe d'isométries d'un certain polonais $X$), et que les problèmes de classification associés peuvent être en général très complexes.

Un espace intervient naturellement dans ces problèmes : il s'agit, comme le lecteur l'aura déjà deviné, de l'espace d'Urysohn $\mathbb{U}$.
Cet espace, construit en 1925 par Urysohn, est caractérisé (à isométrie près) par deux propriétés : c'est le seul polonais qui soit à la fois *universel* (i.e. contient une copie isométrique de tout métrique polonais) et $\omega$-*homogène*, c'est-à-dire que toute isométrie entre sous-espaces finis (munis de la distance induite) s'étend à l'espace total.
Au moment où Urysohn a construit $\mathbb{U}$, il était principalement intéressé par son universalité ; peu après sa construction, Banach et Mazur ont montré que $\mathcal{C}([0,1])$ est également universel, ce qui a contribué à faire tomber dans l'oubli l'espace d'Urysohn. Ce dernier n'a été que très peu étudié pendant 60 ans, à l'exception d'articles de Sierpinski ([Si]) et Huhunaišvili ([Hu]).
En 1986, Katětov a donné une nouvelle construction de $\mathbb{U}$, qui a considérablement relancé l'intérêt pour cet espace ; la même année, Uspenskij a montré que tout groupe polonais est isomorphe à un sous-groupe de $Iso(\mathbb{U})$, et de nombreux travaux se sont succédé depuis. Ce n'est pas ici le lieu de tous les résumer ; on peut trouver une bonne introduction sur ce sujet dans [GaKe], [Pe2] et [Gr]. Remarquons simplement qu'on sait caractériser la topologie de cet espace (Uspenskij [Us4] a prouvé que $\mathbb{U}$ est homéomorphe à $l^2(\mathbb{N})$), et qu'on a énormément d'informations sur les propriétés de $Iso(\mathbb{U})$ ; la plus remarquable est certainement le résultat de Pestov [Pe1] selon lequel $Iso(\mathbb{U})$ est *extrêmement moyennable*, i.e. toute action continue de $Iso(\mathbb{U})$ sur un compact admet un point fixe (global).
Par contre, la géométrie de l'espace lui-même n'a été que peu étudiée jusqu'à très récemment ([CV]) ; considérant qu'elle est digne d'intérêt, on dégage dans cette thèse diverses propriétés géométriques de $\mathbb{U}$, lesquelles permettront en retour d'obtenir des résultats de nature descriptive.
Du point de vue de la théorie descriptive des ensembles, un intérêt est que, puisque $\mathbb{U}$ est universel, tout espace métrique polonais est isométrique à un fermé de $\mathbb{U}$ ; par conséquent, on peut voir $\mathcal{F}(\mathbb{U})$ comme l'*espace des espaces métriques polonais* ; une fois muni de la structure borélienne d'Effros, cet espace est un borélien standard. On peut alors vérifier que la relation d'isométrie $\simeq_i$ est une relation analytique sur $\mathcal{F}(\mathbb{U})$.
Mais l'universalité n'est pas le seul intérêt de l'espace d'Urysohn : elle prend tout son sens quand elle est alliée avec l'$\omega$-homogénéité, c'est ce qui a permis à Gao et Kechris de calculer la complexité de la relation d'isométrie entre diverses classes de polonais.
Un de leurs résultats nous intéresse particulièrement : si l'on note $\simeq_i^{\mathbb{U}}$ la relation induite par l'action par translation de $Iso(\mathbb{U})$ sur $\mathcal{F}(\mathbb{U})$, alors $\simeq_i^{\mathbb{U}} \sim_B \simeq_i$, et ces deux relations sont $\sim_B$ à la relation universelle pour les relations induites par une action borélienne de groupe polonais.

Ceci illustre bien le fait que les relations de nature géométrique peuvent être extrêmement complexes ; on peut alors se demander, comme Gao et Kechris dans [GaKe], s'il existe un espace polonais $X$, et un sous-groupe fermé $H \leq Iso(X)$, tel que $E_H^X$ soit universelle pour les relations induites par une action borélienne de groupe polonais. Cette question est toujours ouverte ; elle constitue un des points de départ de cette thèse (on obtient ici un peu d'informations nouvelles à son sujet, mais pas suffisamment pour y répondre).
Une caractérisation de $\mathbb{U}$ (toujours à isométrie près) par une propriété universelle, déjà connue par Urysohn, joue un rôle fondamental dans l'étude de Gao et Kechris, ainsi que dans cette thèse ; elle est basée sur les *fonctions de Katětov*.

**(D)** ***Fonctions de Katětov, amalgames d'espaces métriques, et liens avec la logique.***
Soit $X$ un espace métrique.
Une fonction $f\colon X \to \mathbb{R}$ est une fonction de Katětov si, et seulement si, poser

$$\forall x \in X \ d(x_f, x) = f(x)$$

définit une distance sur l'espace $X \cup \{x_f\}$ (où $x_f$ est un point n'appartenant pas à $X$) ; on appelle $E(X)$ l'espace des fonctions de Katětov sur $X$.
Ces fonctions correspondent donc aux extensions métriques de $X$ par un point ; alors l'espace d'Urysohn est (à isométrie près) le seul polonais ayant la *propriété d'extension finie*, i.e. tel que

$$\forall n \geq 0 \ \forall x_1, \ldots, x_n \in X \ \forall f \in E(\{x_1, \ldots, x_n\}) \ \exists z \in X \ \forall i \ d(z, x_i) = f(x_i).$$

Cette caractérisation, ainsi que certaines propriétés de l'espace $E(X)$ des fonctions de Katětov sur $X$, sont très utiles pour l'étude des problèmes évoqués ci-dessus.
Pour dégager les propriétés de $E(X)$, on utilise "sans le dire" des propriétés d'amalgamation des espaces métriques séparables ; cela n'est pas sans rappeler la théorie de Fraïssé : en utilisant des propriétés d'amalgamation d'une classe de structures, on obtient un ensemble universel pour ces structures, et $\omega$-homogène. La grande différence est évidemment qu'ici, à la différence de la théorie de Fraïssé, les structures considérées ne sont pas finies.
Néanmoins, on observe de nombreux parallèles entre l'espace d'Urysohn et des objets universels obtenus par la théorie de Fraïssé, par exemple le graphe de Radó : celui-ci est caractérisé, à isomorphisme près, par le fait qu'il contient une copie isomorphe de tout graphe fini, et que tout isomorphisme entre sous-graphes finis s'étend en un isomorphisme du graphe tout entier.
On peut aussi voir le lien entre l'espace d'Urysohn et la théorie de Fraïssé

de la façon suivante : la classe des espaces métriques finis, à distances rationnelles, est une classe de Fraïssé, et admet donc un ensemble universel et ultrahomogène (sa *limite de Fraïssé*) $\mathbb{QU}$, qui est un espace métrique dénombrable, à distances rationnelles.
La caractérisation de $\mathbb{U}$ par la propriété d'extension finie permet alors de voir que $\mathbb{U}$ est le complété de $\mathbb{QU}$ ; c'est d'ailleurs essentiellement comme cela qu'Urysohn a construit $\mathbb{U}$, ce qui pousse par exemple les auteurs de [CV] et [Pe2] à voir la construction d'Urysohn comme un précurseur de la théorie de Fraïssé (avec vingt ans d'avance !).
Dans le même ordre d'idées, il est intéressant de signaler que des résultats de Vershik ([Ve1], [Ve2]) permettent de considérer l'espace d'Urysohn comme "l'espace métrique aléatoire", de même que le graphe de Radó est connu comme étant le "graphe aléatoire".
D'autres connexions avec la logique existent, on peut par exemple consulter [CV] et [Ng]. On ne les développe pas plus ici, car elles n'apparaîtront pas directement dans la suite ; elles semblent néanmoins importantes pour la compréhension des propriétés de l'espace d'Urysohn, et sont sous-jacentes dans beaucoup des constructions de cette thèse.

### (E) *Exposé des résultats et organisation de la thèse*

On commence par présenter au chapitre 1 les propriétés de l'espace $E(X)$ qui interviennent dans nos constructions.
En particulier, on fournit une condition nécessaire et suffisante pour que $E(X)$ soit séparable, et on exprime cette condition à l'aide d'une propriété nouvelle des espaces métriques, la *propriété de colinéarité*, qui a été introduite simultanément, et indépendamment, par N. Kalton dans [Kal] (la terminologie est due à Kalton).

**Théorème.** *Soit $X$ un polonais. Alors $E(X)$ est séparable si, et seulement si, $X$ a la propriété de colinéarité.*

Au chapitre 2, on utilise les fonctions de Katětov pour donner une nouvelle démonstration du fait, établi par Gao et Kechris, que tout groupe polonais est isomorphe au groupe d'isométries d'un polonais ; cette démonstration permet également d'obtenir des informations sur les actions par translation sur $X$ des sous-groupes fermés du groupe d'isométries d'un polonais $X$.

**Théorème.** *Toute action induite par un sous-groupe fermé du groupe d'isométries d'un polonais $X$ par translation sur $X$ se réduit à une action par translation de tout le groupe d'isométries d'un polonais $Y$ sur $Y$.*

Cette méthode permet également de montrer que l'analogue du théorème de Gao et Kechris cité plus haut est vrai pour les compacts (cette question m'a été signalée par Alekos Kechris [Ke*]) :

**Théorème.** *Tout groupe métrisable compact est isomorphe au groupe d'isométries d'un espace métrique compact.*

Au chapitre 3, on décrit en détail la construction de l'espace d'Urysohn par Katětov, et on utilise la caractérisation de $\mathbb{U}$ comme le seul polonais ayant la propriété d'extension finie pour obtenir quelques résultats sur sa géométrie, en particulier :

**Théorème.** *Soit* $\varphi\colon \mathbb{U} \to \mathbb{U}$ *une application isométrique.*
*Si* $\varphi_{|_{B(0,1]}} = id_{B(0,1]}$, *alors* $\varphi = id_{\mathbb{U}}$.

(V. Pestov m' a signalé que ce résultat était déjà connu de M. Rubin en 2003).

**Théorème.** *Si* $X \subset \mathbb{U}$ *est fermé et a la propriété de Heine-Borel (pour la distance induite),* $M > 0$, *alors* $\{z \in \mathbb{U}\colon d(z,X) \geq M\}$ *est isométrique à* $\mathbb{U}$.

Dans les chapitres 4, 5 et 6, on étudie plus en profondeur les propriétés des isométries de $\mathbb{U}$, et de l'action par translation de $Iso(\mathbb{U})$ sur $\mathcal{F}(\mathbb{U})$.
Au chapitre 4, on répond à une question posée par Gao et Kechris dans [GaKe] en démontrant le théorème suivant :

**Théorème.** *Soit* $G$ *un groupe polonais. Il existe un fermé* $F \subset \mathbb{U}$ *tel que* $G$ *est isomorphe (comme groupe topologique) à* $\{\varphi \in Iso(\mathbb{U})\colon \varphi(F) = F\}$.

Ce théorème peut être vu comme une façon "concrète" de se représenter un groupe polonais comme un sous-groupe de $Iso(\mathbb{U})$ (et donc comme une version plus précise du résultat d'Uspenskij selon lequel $Iso(\mathbb{U})$ est un groupe polonais universel) ; en termes de l'action de $Iso(\mathbb{U})$ sur $\mathcal{F}(\mathbb{U})$, il montre que tout groupe polonais est isomorphe au stabilisateur (pour cette action) d'un certain point, ce qui illustre la complexité énorme de la relation d'équivalence associée.

Au chapitre 5, on étudie les propriétés des ensembles de points fixes d'isométrie ; cette étude est motivée par une conjecture de Clemens (cité par Pestov [Pe2]), qui se demandait si l'ensemble $Fix(\varphi)$ des points fixes d'une isométrie $\varphi$ de $\mathbb{U}$, s'il était non vide, était nécessairement isométrique à $\mathbb{U}$.
On démontre que cette conjecture est vraie dans certains cas particuliers, mais fausse en général.

**Théorème.** *Soit $G$ un groupe agissant par isométries sur $\mathbb{U}$ de telle façon que chaque point de $\mathbb{U}$ ait une orbite précompacte.*
*Alors, s'il est non vide, $Fix(G) = \{x \in \mathbb{U} \colon \forall g \in G\ g.x = x\}$ est isométrique à $\mathbb{U}$.*
*En particulier, si un groupe compact agit continûment par isométries sur $\mathbb{U}$, l'ensemble des points de $\mathbb{U}$ laissés invariants par l'action de $G$ est ou vide ou isométrique à $\mathbb{U}$.*

Dans le cas $G = (\mathbb{Z}, +)$, ce résultat signifie que, si $\varphi \in Iso(\mathbb{U})$ est une isométrie à orbites précompactes, alors $Fix(\varphi)$ est soit vide soit finiment injectif.
La précompacité des orbites joue un rôle fondamental dans la démonstration du théorème précédent ; avec raison, puisqu'en général on a le résultat suivant :

**Théorème.** *Soit $X$ un espace métrique polonais. Alors il existe une isométrie $\varphi \in Iso(\mathbb{U})$ telle que $Fix(\varphi)$ soit isométrique à $X$.*

Encore une fois, on emploie les méthodes utilisées dans ces démonstrations pour obtenir un résultat de nature descriptive : elles permettent de calculer la complexité de la relation de conjugaison entre éléments de $Iso(\mathbb{QU})$, et de minorer la complexité de la relation de conjugaison entre éléments de $Iso(\mathbb{U})$.

**Théorème.** *La relation de conjugaison entre éléments de $Iso(\mathbb{QU})$ est $\sim_B$ à la relation d'isomorphisme entre graphes dénombrables.*
*L'isomorphisme entre graphes dénombrables se réduit boréliennement à la relation de conjugaison entre éléments de $Iso(\mathbb{U})$.*

Ensuite, on étudie au chapitre 6 une question posée par Urysohn [Ur] : peut-on préciser les propriétés d'homogénéité de $\mathbb{U}$ ? Là encore, les fonctions de Katětov se révèlent être un outil efficace.

**Théorème.** *Soit $X$ un polonais. Les assertions suivantes sont équivalentes :*
*(a) $X$ est compact.*
*(b) Si $X_1, X_2 \subset \mathbb{U}$ sont deux copies isométriques de $X$, et $\varphi \colon X_1 \to X_2$ est une isométrie, alors il existe $\tilde{\varphi} \in Iso(\mathbb{U})$ qui étend $\varphi$.*
*(c) Si $X_1, X_2 \subset \mathbb{U}$ sont deux copies isométriques de $X$, alors il existe $\varphi \in Iso(\mathbb{U})$ telle que $\varphi(X_1) = X_2$.*
*(d) Si $X_1 \subset \mathbb{U}$ est isométrique à $X$ et $f \in E(X_1)$, alors il existe $z \in \mathbb{U}$ tel que $d(z, x) = f(x)$ pour tout $x \in X_1$.*

*Note :* Après la rédaction de cette thèse, j'ai appris grâce à L. Nguyen Van The que E. Benami a également démontré l'équivalence entre (a), (b) et (c) (qui est la réponse à la question d'Urysohn) en 2005, de manière indépendante, et en utilisant une preuve différente. Je n'ai malheureusement pas encore pu voir la démonstration (d'où l'absence de référence), qui semble être basée sur un résultat proche de celui selon lequel tout groupe polonais est isomorphe au stabilisateur d'un certain fermé de l'espace d'Urysohn.

Enfin, on présente au chapitre 7 les résultats de Holmes [Hol] sur les plongements isométriques de $\mathbb{U}$ dans les espaces de Banach séparables, et montrons comment on peut utiliser ces résultats, ainsi qu'un résultat de Mayer-Wolf [Ma], pour calculer (grâce aussi aux résultats de Gao et Kechris [GaKe]) la complexité de la relation d'isométrie entre espaces de Banach séparables.

**Théorème.** *La relation d'isométrie entre espaces de Banach séparables est bi-réductible boréliennement à la relation universelle pour les actions boréliennes de groupes polonais.*

Dans toute la thèse, on ne numérote que les résultats qui sont nouveaux ; les autres sont attribués aussi précisément que possible à leurs auteurs respectifs. Les résultats nouveaux proviennent des articles [Me1] (résultats du chap. 4), [Me2] (chap. 2), [Me3] (chap.1,3,5,6) et [Me4] (chap.7) ; [Me1] est à paraître aux Fundamenta Mathematicae.

# 1. FONCTIONS DE KATĚTOV

Dans ce chapitre, on étudie en détail les propriétés des fonctions de Katětov sur un espace $X$.
On développe tout d'abord les outils qui seront indispensables dans la suite de la thèse, avant d'étudier la question suivante : peut-on caractériser les métriques polonais $X$ tels que $E(X)$ soit séparable ?
Les propositions "générales" sur ces fonctions ont été démontrées originellement dans [Kat] et [Us2] ; les paragraphes qui suivent sont inspirés de ces articles, ainsi que de [Pe2].

Pour bien comprendre le sens géométrique des fonctions de Katětov, on a besoin d'introduire la notion d'*amalgame* de deux espaces métriques sur un troisième ; intuitivement, cela correspond, si $A \subset X$, $A \subset Y$ sont trois espaces métriques, à "recoller" $X$ et $Y$ le long de $A$, de façon à avoir la plus grande distance possible entre les points de $X \setminus A$ et ceux de $Y \setminus A$.
Pour donner une définition correcte de l'amalgame d'espaces métriques, il faut prendre en compte le fait que l'espace obtenu dépend de la façon dont on a recollé nos deux copies de $A$ :

Supposons que $A,\ X, Y$ soient trois espaces métriques non vides avec $A \subset X$, et $i \colon A \to Y$ soit une application isométrique de $A$ dans $Y$.
Alors on commence par définir une pseudo-distance $d$ sur l'union disjointe $Z = X \sqcup Y$ de la façon suivante :
– $\forall x, x' \in X\ d(x, x') = d_X(x, x')$ ;
– $\forall y, y' \in Y\ d(y, y') = d_Y(y, y')$ ;
– $\forall x \in X\ \forall y \in Y\ d(x, y) = \inf\{d(x, a) + d(y, i(a)) \colon a \in A\}$.

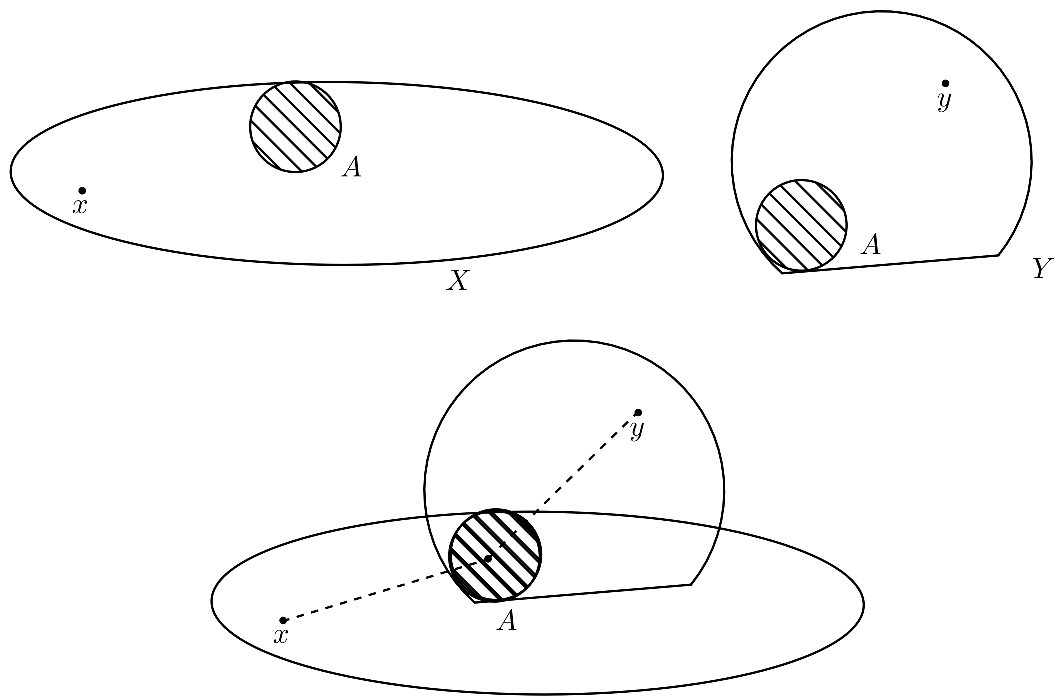
Il est clair que $d$ vérifie l'inégalité triangulaire ; par contre, il y a des points $x \neq y$ tels que $d(x, y) = 0$.
Pour régler ce problème le plus simplement possible, on suppose de plus que $A$ est fermé dans $X$ (ou que $i(A)$ est fermé dans $Y$). On peut définir l'amalgame d'espaces métriques en toute généralité, mais c'est tout ce dont nous aurons besoin ici.

Si l'on appelle $\sim$ la relation qui identifie $a$ et $i(a)$ pour tout $a \in A$, on voit alors que, si $z \neq z' \in Z$, alors

$$d(z,z') = 0 \Leftrightarrow (z \in A \,\&\, z' = i(z)) \text{ ou } (z' \in A \,\&\, z = i(z')) \ .$$

Par conséquent, $d$ induit une distance sur l'espace $Z_{/\sim}$, et l'espace ainsi obtenu est l'amalgame métrique de $X$ et $Y$ relativement à $i$.
Remarquons que cet espace est séparable si $X$ et $Y$ le sont (et polonais si $X$ et $Y$ le sont).

Dans la suite, quand l'identification entre $A$ et $i(A)$ est claire, on emploiera abusivement l'expression "amalgame métrique de $X$ et $Y$ sur $A$".




Une façon de se représenter l'amalgame de $X$ et $Y$ sur $A$.

## 1.1 Définition, propriétés

Si $X$ est un espace métrique, on dit que $f \colon X \to \mathbb{R}^+$ est une *fonction de Katětov* si

$$\forall x, y \in X \ |f(x) - f(y)| \leq d(x,y) \leq f(x) + f(y) \ .$$

Ces fonctions correspondent aux extensions métriques de $X$ par un point, de la façon suivante : si $f \in E(X)$, on peut définir une distance sur l'espace $X \cup \{f\}$, qui prolonge la distance sur $X$, en posant $d(f,x) = f(x)$ pour tout $x \in X$.

Dire que $f$ est une fonction de Katětov revient à dire que $d$ ainsi définie est bien une distance ; autrement dit, toutes les extensions métriques de $X$ par un point sont obtenues de cette façon.

Le grand intérêt de ce point de vue est qu'il existe une distance naturelle entre fonctions de Katětov.
En effet, si $f, g \in E(X)$ et $x_0, x$ sont deux points de $X$, alors on a :
$|f(x) - d(x,x_0)| \leq f(x_0)$ et $|g(x) - d(x,x_0)| \leq g(x_0)$ .
Par conséquent, $|f(x)-g(x)| \leq f(x_0)+g(x_0)$, donc $\sup\{|f(x)-g(x)| \colon x \in X\}$ est fini.
Toute différence de fonctions de Katětov est donc une fonction bornée, et on peut poser $d(f,g) = ||f-g||_\infty = \sup\{|f(x)-g(x)| \colon x \in X\}$.

D'un point de vue géométrique, cette distance correspond à la plus petite distance $d(z,z')$ possible, quand $Y = X \cup \{z\} \cup \{z'\}$ est une extension métrique de $X$ telle que $d(z,x) = f(x)$ et $d(z',x) = g(x)$ pour tout $x$.

Puisqu'on veut voir $E(X)$ comme l'espace des extensions métriques de $X$ par un point, il est naturel de voir $X$ comme un sous-espace de $E(X)$, celui des extensions triviales par un point (i.e. le point qu'on ajoute était déjà dans $X$ !)
Analytiquement, ceci se fait via l'*application de Kuratowski* $x \mapsto \delta_x$, définie de la façon suivante :

$$\forall x' \in X \ \delta_x(x') = d(x,x') \ .$$

L'inégalité triangulaire permet de vérifier que $x \mapsto \delta_x$ est un plongement isométrique de $X$ dans $E(X)$ (dans la suite du texte, quand on écrira "$X \subset E(X)$", on identifiera toujours $X$ à son image dans $E(X)$ par l'application de Kuratowski).

Reste à vérifier que tout cela est bien cohérent, i.e. que la métrique induite sur $X \cup \{f\} \subset E(X)$ par celle de $E(X)$ correspond bien à la distance définie plus haut sur $X \cup \{f\}$.
Autrement dit, il nous faut vérifier que, si $x \in X$ et $f \in E(X)$, on a $d(f,\delta_x) = f(x)$. Là encore, l'inégalité triangulaire donne le résultat :

$\forall x' \in X \ |f(x') - d(x,x')| \leq f(x)$ , et il y a égalité quand $x = x'$.

De même, si $Y \subset X$, on a une façon naturelle de considérer les extensions de $Y$ par un point comme des extensions métriques de $X$ par un point : si $Y \cup \{z\}$ est une extension de $Y$, on obtient une extension de $X$ par un point en amalgamant $Y \cup \{z\}$ et $X$ sur $Y$.
Encore une fois, cette opération se traduit analytiquement dans $E(X)$ : définissons, pour toute $f \in E(Y)$, son *extension de Katětov* $k(f)$ à $X$ de la façon suivante :

$$\forall x \in X \ k(f)(x) = \inf\{f(y) + d(y,x) \colon y \in Y\} \ .$$

Autrement dit, $k(f)$ est la plus grande fonction 1-lipschitzienne sur $X$ qui coïncide avec $f$ sur $Y$ ; on vérifie facilement que $k(f) \in E(X)$, et que cette opération fournit un plongement isométrique de $E(Y)$ dans $E(X)$.
Dorénavant, on dira, si $f \in E(X)$ et $Y \subset X$ vérifient

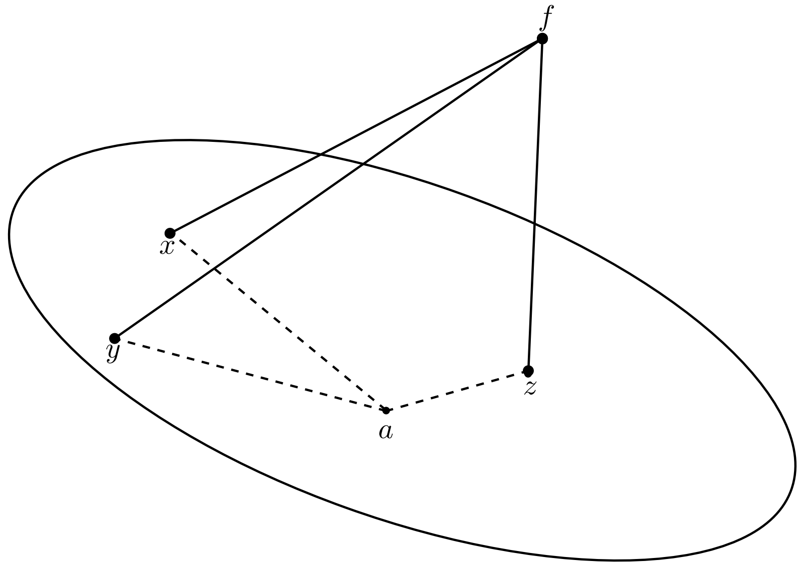
$$\forall x \in X \ f(x) = \inf\{f(y) + d(y,x) \colon y \in Y\} \ ,$$

que $f$ est *contrôlée* par $Y$, ou que $Y$ est un *support* pour $f$.
Évidemment, il n'y a pas unicité du support : tout ensemble qui contient un support pour $f$ est également un support pour $f$.
Il est intéressant de noter ici que, si $f$ et $g$ ont un support commun $S$, alors on a $d(f,g) = \sup_{x \in S}\{|f(x) - g(x)|\}$ (ceci découle du fait que l'extension de Katětov induit un plongement isométrique de $E(S)$ dans $E(X)$).

On peut essayer de faire un dessin qui illustre la connexion entre extension de Katětov et amalgame métrique de deux espaces (cf figure page suivante).
Un intérêt supplémentaire de la définition de $E(X)$ est que les isométries de $X$ s'étendent naturellement en isométries de $E(X)$, et que ce prolongement est unique.

**Proposition.** *(Katětov)*
*Toute isométrie de $X$ s'étend en une isométrie de $E(X)$.*
*De plus, si $X \subset A \subset E(X)$, et $\varphi$ est une isométrie de $X$ qui s'étend en une isométrie de $A$, alors le prolongement de $\varphi$ à $A$ est unique.*
*(On a ici identifié $X$ à son image dans $E(X)$ via l'application de Kuratowski)*

**Preuve.**
Commençons par prouver l'unicité : soit $\varphi \in Iso(X)$, et $X \subset A \subset E(X)$.
On veut montrer que, si $\varphi$ s'étend en une isométrie $\tilde{\varphi}$ de $A$, alors cette extension est unique.




L'espace $X_f$, dans le cas où $f$ est contrôlée par $\{x, y, z\}$ ; les traits en pointillés représentent les chemins à considérer pour calculer $f(a)$.

Pour toute $f \in A \setminus X$, on doit avoir

$$\forall x \in X \ d(\tilde{\varphi}(f), \delta_x) = d(f, \delta_{\varphi^{-1}(x)}) = f(\varphi^{-1}(x))$$

Par conséquent, $d(\tilde{\varphi}(f), \delta_x) = d(f \circ \varphi^{-1}, \delta_x)$ pour tout $x \in X$ ; étant donné la définition de la distance sur $E(X)$, ceci entraîne que $\tilde{\varphi}(f) = f \circ \varphi^{-1}$ pour toute $f \in A \setminus X$, et donc que l'extension, si elle existe, est unique.

Pour voir que toute isométrie de $X$ s'étend en une isométrie de $E(X)$, il reste à voir si $\tilde{\varphi}$ définie par $\tilde{\varphi}(f) = f \circ \varphi^{-1}$ pour $f \in E(X)$ est une isométrie (le fait que $\tilde{\varphi}$ prolonge $\varphi$ est immédiat).

Si $f, g \in E(X)$, on a

$$d(\tilde{\varphi}(f), \tilde{\varphi}(g)) = \sup\{|f \circ \varphi^{-1}(x) - g \circ \varphi^{-1}(x)| \colon x \in X\}, \text{ d'où}$$

$$d(\tilde{\varphi}(f), \tilde{\varphi}(g)) = \sup\{|f(x) - g(x)| \colon x \in X\} = d(f, g)\,. \qquad \Diamond$$

Comme nous allons le voir dans la section suivante, $E(X)$ n'est en général pas séparable ; ceci est gênant pour nos constructions.
On peut néanmoins remédier simplement à ce problème, en ne considérant que les extensions ayant un support fini :
On pose $E(X, \omega) = \{f \in E(X) \colon \ f \text{ a un support fini } \}$ .
Alors, $E(X, \omega)$ a toutes les propriétés dont nous aurons besoin par la suite.

**Proposition.** *(Katětov) $E(X,\omega)$ est séparable ; de plus, l'application de Kuratowski plonge isométriquement $X$ dans $E(X,\omega)$, de telle façon que toute isométrie de $X$ s'étend (uniquement) en une isométrie de $E(X,\omega)$, et le morphisme d'extension est continu.*

**Preuve :**
Pour vérifier la première partie de la proposition, fixons une partie dénombrable dense $\{x_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ dans $X$, et appelons $Y$ l'ensemble des éléments de $E(X,\omega)$ qui ont un support contenu dans $\{x_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ et prennent des valeurs rationnelles sur ce support.
Par définition, $Y$ est dénombrable ; il nous suffit donc de prouver que $Y$ est dense dans $E(X,\omega)$.
Soit $f\in E(X,\omega)$ ; par densité de $\{x_i\}$, on peut supposer que $f$ a un support fini $A$ contenu dans $\{x_i\}$.
Il nous suffit de montrer que toute $f\in E(A)$ peut être approchée aussi précisément qu'on veut par une fonction $g\in E(A)$ qui ne prend que des valeurs rationnelles (l'extension de Katětov $k_X(g)$ de $g$ à $X$ appartient à $Y$, et fournit l'approximation de $f$ recherchée).
Posons $A=\{a_1,\dots,a_n\}$ et supposons $f(a_1)\geq f(a_2)\geq\dots\geq f(a_n)$ .

Alors, $\varepsilon>0$ étant fixé, on peut trouver $n$ réels $\lambda_1,\dots,\lambda_n$ tels que :
- $\forall i=1,\dots,n \quad f(a_i)+\sum_{k=1}^{i}\lambda_k\in\mathbb{Q}$ ;
- $\forall i,j=1,\dots,n,\ i\leq j,\quad f(a_i)+\sum_{k=1}^{i}\lambda_k\geq f(a_j)+\sum_{k=1}^{j}\lambda_k$ ;
- $\sum_{i=1}^{n}\lambda_i\leq\varepsilon$.

Ces conditions permettent d'assurer que la fonction $g$ définie sur $F$ par la formule $g(a_i)=f(a_i)+\sum_{k=1}^{i}\lambda_k$ appartient à $E(A)$.
En effet, si $1\leq i,j\leq n$ alors on a $|g(a_i)-g(a_j)|\leq|f(a_i)-f(a_j)|\leq d(a_i,a_j)$, et $g(a_i)+g(a_j)\geq f(a_i)+f(a_j)\geq d(a_i,a_j)$.
De plus, $g$ est à valeurs rationnelles, et $d(f,g)=\sum_{i=1}^{n}a_i\leq\varepsilon$.

Pour démontrer la deuxième partie de la proposition, commençons par remarquer que, si $\varphi$ est une isométrie de $X$, et $Y$ est un support pour $f\in E(X)$, alors $\varphi(Y)$ est un support pour $f\circ\varphi^{-1}$.
Le raisonnement de la proposition 1.1 permet donc de voir que $\varphi$ s'étend en une isométrie $\tilde{\varphi}$ de $E(X,\omega)$, définie par la formule $\tilde{\varphi}(f)=f\circ\varphi^{-1}$.
Pour démontrer que l'application $\varphi\mapsto\tilde{\varphi}$ est continue, il nous suffit de fixer $f\in E(X,\omega)$, et de montrer que, si $\varphi_n\to\varphi$ dans $Iso(X)$, alors $\tilde{\varphi}_n(f)\to\tilde{\varphi}(f)$ dans $E(X,\omega)$.
Pour cela, fixons $\varepsilon>0$. Puisque $f$ a un support fini $S$, on a, pour $n$ suffisamment grand et tout $x\in S$, que $d(\varphi_n(x),\varphi(x))\leq\varepsilon$.

Par conséquent, pour $n$ suffisamment grand, $\tilde{\varphi}(f)$ et $\tilde{\varphi}_n(f)$ diffèrent au plus de $\varepsilon$ sur leur support commun $\varphi(F) \cup \varphi_n(F)$, et ceci implique que $d(\tilde{\varphi}_n(f), \tilde{\varphi}(f)) \leq \varepsilon$. $\Diamond$

## 1.2 Séparabilité de $E(X)$

Ici, on cherche à caractériser les espaces $X$ tels que $E(X)$ soit séparable ; j'ai été amené à considérer cette question lors de travaux sur les propriétés d'homogénéité de l'espace d'Urysohn (cf chapitre 6), mais elle me semble intéressante en soi, c'est pourquoi on l'évoque ici.
La proposition suivante permet de simplifier un peu notre travail :

**Proposition 1.** *Si $X$ est polonais mais n'a pas la propriété de Heine-Borel, alors $E(X)$ n'est pas séparable.*

(Rappelons qu'un espace métrique a la propriété de Heine-Borel si, et seulement si, ses sous-ensembles bornés sont précompacts)
**Preuve.**
Par hypothèse, il existe $M, \varepsilon > 0$ et $(x_i)_{i \in \mathbb{N}}$ tels que

$$\forall i \neq j,\ \varepsilon \leq d(x_i, x_j) \leq M.$$

Si $A \subset \mathbb{N}$, définissons $f_A : \{x_i\}_{i \geq 0} \to \mathbb{R}$ par $f_A(x_i) = \begin{cases} M & \text{si } i \in A \\ M + \varepsilon & \text{sinon} \end{cases}$.
On voit alors que, pour tout $A \subset \mathbb{N}$, $f_A \in E(\{x_i\})$, et que si $A \neq B$ on a $d(f_A, f_B) = \varepsilon$ (où $d$ désigne la distance sur $E(\{x_i\})$ ).
Par conséquent, $E(\{x_i\}_{i \geq 0})$ n'est pas séparable ; puisqu'il est isométrique à un sous-espace de $E(X)$ (cf section 1.1), on voit que $E(X)$ n'est pas séparable non plus. $\Diamond$

On pourrait maintenant espérer que seuls les compacts sont tels que $E(X)$ est séparable, ou que tous les espaces polonais et Heine-Borel ont cette propriété. Malheureusement, la situation n'est pas aussi simple que cela, comme le montrent les deux exemples suivants :

**Exemple.** *Si $\mathbb{N}$ est muni de sa distance usuelle, alors $E(\mathbb{N}) = \overline{E(\mathbb{N}, \omega)}$.*

En effet, soit $f \in E(\mathbb{N})$ ; on sait que pour tout $n$ on a $|f(n) - n| \leq f(0)$, et $f(n+1) \leq f(n) + 1$. On peut récrire la dernière inégalité sous la forme $f(n+1) - (n+1) \leq f(n) - n$.
Par suite, $f(n) - n$ converge vers un certain $a \in \mathbb{R}$ ; fixons $\varepsilon > 0$, et choisissons

$M$ tel que $n \geq M \Rightarrow |f(n) - n - a| \leq \varepsilon$.
Alors, on a, pour tout $n \geq M$ :

$$0 \leq f(M) + n - M - f(n) = (f(M) - M - a) - (f(n) - n - a) \leq 2\varepsilon.$$

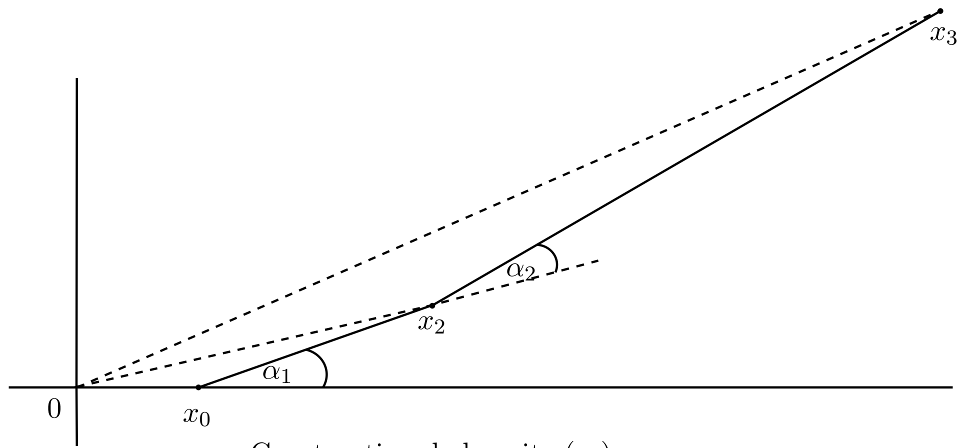
Si l'on appelle (pour $i \in \mathbb{N}$) $f_i$ l'extension de Katětov de $f_{|[0,i]}$, alors $f_i \in E(\mathbb{N}, \omega)$ et les inégalités ci-dessus entraînent que $(f_i)$ converge uniformément vers $f$.
En remplaçant la suite $(f(n)-n)$ par la fonction $x \mapsto f(x)-x$, on aurait obtenu le même résultat pour $\mathbb{R}$ (muni de sa distance usuelle) ; en fait, on peut utiliser la même méthode pour prouver que $E(\mathbb{R}^n, ||.||_1)$ (ou $E(\mathbb{R}^n, ||.||_\infty)$ est séparable pour tout $n$.
La situation est très différente quand $\mathbb{R}^n$ est muni de la norme euclidienne, comme le montre l'exemple suivant :

**Exemple.** *Si $n \geq 2$ et $\mathbb{R}^n$ est muni de la distance euclidienne, alors $E(\mathbb{R}^n)$ n'est pas séparable.*

Il suffit de démontrer le résultat pour $n = 2$, puisque $E(\mathbb{R}^2, ||.||_2)$ est isométrique à un sous-ensemble de $E(\mathbb{R}^n, ||.||_2)$ pour tout $n \geq 2$ .
Il est possible de construire une suite $(x_i)$ de points de $\mathbb{R}^2$ telle que $d(x_{i+1}, 0) \geq d(x_i, 0) + 1$ pour tout $i$, et

$$\forall i > j \in \mathbb{N},\ d(x_i, 0) \leq d(x_i, x_j) + d(x_j, 0) - 1 \qquad (*)$$

La construction est simple, mais un peu lourde ; plutôt que de l'expliciter, on fait un dessin (cf page suivante).
On peut supposer que $d(x_i, 0) \geq 1$ pour tout $i$ ; définissons maintenant $f \colon \{x_i\}_{i \geq 0} \to \mathbb{R}$ par $f(x_i) = d(x_i, 0)$. Par définition, $f$ est une fonction de Katětov.
Si $A \subset \mathbb{N}$ est non vide, appelons $f_A \colon \{x_i\}_{i \geq 0} \to \mathbb{R}$ l'extension de Katětov de $f_{|\{x_i \colon i \in A\}}$ à $\{x_i\}$.
Soient maintenant $A \neq B$ deux sous-ensembles non vides de $\mathbb{N}$, appelons $m$ le plus petit élément de $A \Delta B$, et supposons sans perte de généralité que $m \in A$.
On a alors $f_A(x_m) = d(x_m, 0)$, et $f_B(x_m) = d(x_m, x_i) + d(x_i, 0)$ pour un certain $i \neq m$.
Si $i < m$, alors $(*)$ entraîne que $f_B(x_m) - f_A(x_m) \geq 1$ ; si $i > m$, alors $f_B(x_m) - f_A(x_m) \geq d(x_i, 0) - d(x_m, 0) \geq 1$.
Dans les deux cas, on voit que $d(f_A, f_B) \geq 1$ pour tout $A \neq B$, ce qui montre que $E(\{x_i\}_{i \geq 0})$ n'est pas séparable.
Par conséquent, $E(\mathbb{R}^2, ||.||_2)$ ne peut être séparable.




Construction de la suite $(x_i)$

Ces deux exemples ont un point commun : dans le premier cas, le fait que tous les points sont alignés permet de prouver que $\overline{E(X,\omega)} = E(X)$ ; dans le second, l'existence d'une suite infinie de points sur laquelle l'inégalité triangulaire est toujours loin d'être une égalité permet de prouver que $E(X)$ n'est pas séparable.

Ceci correspond en fait à une situation générale, et on peut maintenant caractériser les espaces $X$ tels que $E(X)$ est séparable :
Soit $(X, d)$ un espace métrique non vide.
Si $\varepsilon > 0$, on dit qu'une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'éléments de $X$ est *$\varepsilon$-bien-alignée* si on a, pour chaque $r \geq 0$ , $\sum_{i=0}^{r} d(u_i, u_{i+1}) \leq d(u_0, u_{r+1}) + \varepsilon$.
Une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'éléments de $X$ est dite *alignée* si pour tout $\varepsilon > 0$ il existe $N \geq 0$ tel que $(u_0, u_N, u_{N+1}, \ldots)$ est $\varepsilon$-bien-alignée.

Intuitivement, ces suites définissent une "direction à l'infini" ; dire qu'une suite a une sous-suite alignée revient alors à dire que les bornés sont précompacts et que toute suite "partant à l'infini" doit avoir une sous-suite suivant une de ces directions à l'infini. Le théorème ci-dessous peut donc peut-être se voir comme une propriété de compacité, mais il ne paraît pas facile d'exprimer cette idée de façon satisfaisante.

**Théorème 2.** *Soit $X$ un polonais. Les assertions suivantes sont équivalentes :*
*(a) $E(X) = \overline{E(X,\omega)}$.*
*(b) $E(X)$ est séparable .*
*(c) $\forall \delta > 0\ \forall (x_n)\ \exists N \in \mathbb{N}\ \forall n \geq N\ \exists i \leq N\ d(x_0, x_n) \geq d(x_0, x_i) + d(x_i, x_n) - \delta$.*
*(d) De toute suite d'éléments de $X$ on peut extraire une sous-suite alignée.*

**Preuve du théorème 2.**

$(a) \Rightarrow (b)$ est clair ; la preuve de $\neg(c) \Rightarrow \neg(b)$ est similaire à celle de la non-séparabilité de $(\mathbb{R}^n, ||.||_2)$, aussi la laissons-nous en exercice pour le lecteur intéressé.
Pour voir que $(c) \Rightarrow (d)$,on peut commencer par remarquer que $(c)$ entraîne que, pour tout $\varepsilon > 0$ et toute suite $(x_n) \in X^{\mathbb{N}}$, on peut trouver une sous-suite $(x_{\varphi(n)})$ (avec $\varphi(0) = 0$) telle que

$$\forall n \leq m \; d(x_0, x_{\varphi(n)}) + d(x_{\varphi(n)}, x_{\varphi(m)}) \leq d(x_0, x_{\varphi(m)}) + \varepsilon \quad .$$

Un procédé diagonal permet alors de construire une sous-suite alignée de $(x_i)$ : on commence par trouver une application strictement croissante $\varphi_0 \colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ comme ci-dessus, avec $\varepsilon = 1$ par exemple ; puis on trouve une application strictement croissante $\varphi_1 \colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ telle que

$$\forall m \geq n \geq 2 \; d(x_0, x_{\varphi_0(\varphi_1((n)))}) + d(x_{\varphi_0(\varphi_1((n)))}, x_{\varphi_0(\varphi_1((m)))}) \leq d(x_0, x_{\varphi_0(\varphi_1((m)))}) + \frac{1}{2} \, .$$

On répète ce procédé, et on pose $\varphi(n) = \varphi_0 \circ \ldots \circ \varphi_n(n)$. Par construction de $\varphi$, on a alors

$$\forall m \geq n \; d(x_0, x_{\varphi(n)}) + d(x_{\varphi(n)}, x_{\varphi(m)}) \leq d(x_0, x_{\varphi(m)}) + \frac{1}{2^n} \, .$$

L'inégalité triangulaire implique que la sous-suite $(x_{\varphi(n)})_{n \in \mathbb{N}}$ est alignée.

Il ne nous reste qu'à démontrer que $(d) \Rightarrow (a)$.
Pour cela, raisonnons par l'absurde et supposons qu'il existe un espace polonais $X$ qui a la propriété (d), mais pas la propriété (a).
Remarquons déjà que $X$ a la propriété de Heine-Borel : si $(x_i)_{i \in \mathbb{N}}$ est telle que $\varepsilon \leq d(x_i, x_j) \leq M$ pour tout $i \neq j$, alors il est clair qu'on ne peut pas en extraire de sous-suite alignée.

Soit alors $f \in E(X) \setminus \overline{E(X, \omega)}$ ; appelons $f_n$ l'extension de Katětov de $f_{|_{B(z,n]}}$ à $X$ (où $z$ désigne un point quelconque de $X$).
Alors, pour tout $x \in X$ et tout $n \leq m$ on a $f_n(x) \geq f_m(x) \geq f(x)$ ; par conséquent la suite $(d(f_n, f))$ décroît vers un certain $a \geq 0$.
Puisque les boules fermées de $X$ sont compactes, chaque $f_n$ appartient à $\overline{E(X, \omega)}$ : par suite $a > 0$, et $d(f_n, f) \geq a$ pour tout $n$.
Il est alors possible de construire par récurrence une suite $(x_i)_{i \geq 1}$ d'éléments de $X$ telle que pour tout $i \geq 1$ $d(x_{i+1}, z) \geq d(x_i, z) + 1$, et

$$f(x_i) \leq \min_{j<i} \{f(x_j) + d(x_i, x_j)\} - \frac{3a}{4}$$

Puisque $|f(x_i) - d(x_i, z)| \leq f(z)$, on peut supposer, quitte à extraire, que $(f(x_i) - d(x_i, z))$ converge vers un certain $l \in \mathbb{R}$.
Posons maintenant $\delta = \frac{a}{4}$. La propriété (d) nous permet d'extraire de la suite $(x_i)$ une sous-suite $x_{\varphi(i)}$ telle que

$$\forall j \leq i, \qquad d(z, x_{\varphi(i)}) \geq d(z, x_{\varphi(j)}) + d(x_{\varphi(i)}, x_{\varphi(j)}) - \delta$$

Pour simplifier la notation, appelons encore $(x_i)$ cette sous-suite.
Soit alors $M \in \mathbb{N}$ tel que $n \geq M \Rightarrow |f(x_n) - d(x_n, z) - l| \leq \frac{\delta}{2}$.
Pour tout $n \geq M$, on a
$f(x_M) + d(x_M, x_n) - f(x_n) = (f(x_M) - d(x_M, z) - l) - (f(x_n) - d(x_n, z) - l)$ $+ \ (d(x_M, z) - d(x_n, z) + d(x_M, x_n))$, donc

$$f(x_M) + d(x_M, x_n) - f(x_n) \leq 2\delta = \frac{a}{2} < \frac{3a}{4} \ .$$

Ceci contredit la définition de la suite $(x_i)$. ◊

Il est important de signaler ici que, au cours de la preuve du théorème 2, on a démontré que, si $E(X)$ est séparable et $f \in E(X)$, alors il existe pour tout $\varepsilon > 0$ un compact $K \subset X$ tel que $d(f, k(f_{|K})) < \varepsilon$.

Assez curieusement, N. Kalton a considéré au même moment ([Kal], où il étudie un problème tout à fait différent) cette notion, sous une forme équivalente.
Reprenons sa terminologie, et disons qu'un triplet ordonné $\{x_1, x_2, x_3\}$ de points de $X$ est *$\varepsilon$-colinéaire* si $d(x_1, x_3) \geq d(x_1, x_2) + d(x_2, x_3) - \varepsilon$ (où $\varepsilon$ est un réel positif).
A la suite de Kalton, disons qu'un polonais $X$ a la *propriété de colinéarité* si :

Pour tout sous-ensemble infini $A \subset X$ et tout $\varepsilon > 0$, il existe $x_1, x_2, x_3 \in A$ (deux à deux distincts) tels que $\{x_1, x_2, x_3\}$ est $\varepsilon$-colinéaire.

En utilisant le théorème de Ramsey, Kalton a démontré dans [Kal] qu'un espace métrique a la propriété de colinéarité si, et seulement si, toute suite admet une sous-suite alignée.
Par conséquent, on a le résultat suivant :

**Corollaire 3.** *Soit $X$ un polonais.*
*Alors $X$ a la propriété de colinéarité si, et seulement si, $E(X)$ est séparable.*

Suite aux exemples qui précèdent la preuve du théorème 2, on peut se poser la question suivante : peut-on caractériser simplement les espaces vectoriels

normés (nécessairement de dimension finie) ayant la propriété de colinéarité ? Rappelons qu'un espace vectoriel normé de dimension finie $X$ est *polyédral* si $X$ se plonge dans un certain $l_\infty^n$.
Les mêmes raisonnements que dans les exemples permettent de vérifier facilement que tout espace polyédral a la propriété de colinéarité ; dans [Kal], Kalton remarque qu'un résultat de Lindenstrauss (1964, cf [Li]) entraîne que la réciproque est vraie.

# 2. QUELS GROUPES SONT DES GROUPES D'ISOMÉTRIES ?

Dans [GaKe] Gao et Kechris démontrent, au cours de leur étude de la complexité de la relation d'isométrie entre polonais, le résultat suivant :

**Théorème (GK).** *(Gao-Kechris)*
*Tout groupe polonais est isomorphe au groupe d'isométries d'un certain espace métrique polonais.*

Autrement dit, on peut toujours supposer qu'un groupe polonais est un groupe d'isométries. Mais peut-on dire que toute action de groupe polonais se réduit à une action par isométries ? Cela a amené Gao et Kechris à poser la question suivante :

Est-ce que toute action (disons borélienne) de groupe polonais sur un borélien standard se réduit boréliennement à une action (borélienne) par isométries d'un groupe polonais sur un polonais $X$ ?

On ne sait pas même pas s'il existe un certain espace polonais $X$, et un sous-groupe fermé $H$ de $Iso(X)$, tel que l'action de $H$ sur $X$ par isométries soit universelle pour les relations induites par une action borélienne de groupes polonais.
Cette question, signalée dans [GaKe], est à ma connaissance toujours ouverte ; une réponse positive apporterait une nouvelle illustration de l'intérêt de l'étude de l'espace d'Urysohn (des arguments similaires à ceux que nous utiliserons dans les chapitres suivants permettent de vérifier que la question précédente est équivalente à celle où l'on remplace $X$ par $\mathbb{U}$ dans l'énoncé).

Dans ce chapitre, on montre comment utiliser les fonctions de Katětov pour obtenir une nouvelle preuve du théorème (GK) ; cette preuve est plus simple (on peut bien sûr mettre en doute l'objectivité de cette assertion), et en tout cas plus courte, que celle qu'on peut trouver dans [GaKe] (où ce théorème est en fait une conséquence de la preuve d'un autre résultat, et où aucune preuve "directe" n'est donnée).
Ensuite, on utilise les mêmes méthodes pour démontrer que l'analogue du

théorème (GK) obtenu en remplaçant "métrique polonais" par "métrique compact " dans son énoncé est également vrai (cette question m'a été signalée par Alekos Kechris [Ke*]).

**Preuve du théorème (GK).**

Soit $G$ un groupe polonais, et $d$ une distance invariante à gauche sur $G$. Appelons $X$ le complété de l'espace métrique $(G, d)$.
L'action de $G$ sur lui-même par translation à gauche s'étend en une action de $G$ sur $X$ par isométries, et ceci nous fournit un plongement de $G$ dans $Iso(X)$, dont on vérifie sans peine qu'il est continu, et d'image fermée. Puisqu'un morphisme continu et bijectif entre groupes polonais est nécessairement un isomorphisme (cf [Ke1]), ceci montre que $G$ se plonge isomorphiquement dans $Iso(X)$.
Dans la suite, on identifie $G$ au sous-groupe correspondant de $Iso(X)$, et supposons, sans perdre de généralité, que $X$ est borné, de diamètre plus petit que 1.

**Fait 1.** Pour toute $\varphi \in Iso(X) \setminus G$, il existe $x_1, \ldots, x_m \in X$ et $\varepsilon > 0$ tels que

$$V_\varphi = \{\psi \in Iso(X) \colon \forall k = 1, \ldots, m \ d(\psi(x_k), \varphi(x_k)) < \varepsilon\} \subset Iso(X) \setminus G \ ,$$

avec $2m\varepsilon = \min(d(x_l, x_k))$ .

**Preuve du Fait 1 :** C'est une conséquence directe de la définition de la topologie produit, et du fait que $G$ est fermé dans $Iso(X)$. ◊

Pour chaque $\varphi \in Iso(X) \setminus G$ on peut choisir un voisinage $V_\varphi$ comme ci-dessus ; puisque $Iso(X) \setminus G$ est Lindelöf, on peut trouver une famille dénombrable $\{\varphi_i\}_{i \geq 1}$ tel que $Iso(X) \setminus G = \bigcup_{i \geq 1} V_{\varphi_i}$.
Pour simplifier la notation dans la preuve ci-dessous, convenons que, pour tout $i \geq 1$, $V_{\varphi_i} = \{\psi \in Iso(X) \colon \forall k = 1 \ldots, m_i \ d(y^i_k, \psi(x^i_k)) < \varepsilon_i\}$.

Pour tout $i \geq 1$, définissons des fonctions $f_i, g_i \in E(X)$ :

$f_i(x) = \min_{1 \leq k \leq m_i}\{1 + d(x, x^i_k) + 2(k-1)\varepsilon_i\}$, et
$g_i(x) = \min_{1 \leq k \leq m_i}\{1 + d(x, y^i_k) + 2(k-1)\varepsilon_i\}$ .

Si $\varphi \in Iso(X)$, appelons $\varphi^*$ son (unique) extension à $E(X)$, définie par $\varphi^*(f)(x) = f(\varphi^{-1}(x))$.
Le lemme suivant justifie l'introduction des fonctions $f_i, g_i$.

**Lemme 2.1.** *Pour toute $\varphi \in Iso(X)$, et pour tout $i \geq 1$, on a*

$$\big(\varphi \in V_{\varphi_i}\big) \Leftrightarrow \big(d(\varphi^*(f_i), g_i) < \varepsilon_i\big) \ .$$

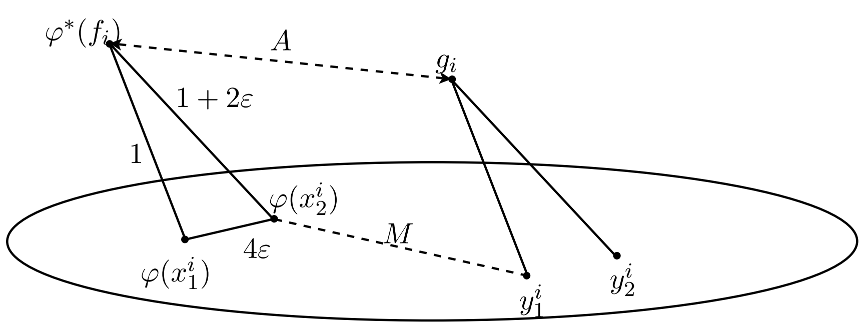
**Preuve du Lemme 2.1.**
Soit $\varphi \in V_{\varphi_i}$. Les diverses inégalités qui entrent en jeu entraînent que :

$\varphi^*(f_i)(y_k^i) \ = 1 + d(\varphi(x_k^i), y_k^i) + 2(k-1)\varepsilon_i$, donc $|\varphi^*(f_i)(y_k^i) - g_i(y_k^i)| \ < \varepsilon_i$ .

$g_i((\varphi(x_k^i)) \ = 1 + d(\varphi(x_k^i), y_k^i) + 2(k-1)\varepsilon_i$, donc $|\varphi^*(f_i)(\varphi(x_k^i)) - g_i(\varphi(x_k^i))| < \varepsilon_i$ .

Puisque $\varphi^*(f_i)$ et $g_i$ sont contrôlées par $\{\varphi(x_k^i)\}_{k=1,\dots,m_i} \cup \{y_k^i\}_{k=1,\dots,m_i}$, les inégalités ci-dessus suffisent à démontrer que $d(\varphi^*(f_i), g_i) < \varepsilon_i$.

Réciproquement, soit $\varphi \in Iso(X)$ telle que $d(\varphi^*(f_i), g_i) < \varepsilon_i$. Démontrons par récurrence sur $k = 1, \dots, m$ que $d(\varphi(x_k^i), y_k^i) < \varepsilon_i$.
Pour vérifier ceci pour $k = 1$, on peut remarquer que $g_i(\varphi(x_1^i)) < 1 + \varepsilon_i$, par conséquent $g_i(\varphi(x_1^i)) = g_i(y_1^i) + d(y_1^i, \varphi(x_1^i))$ .
Ceci entraîne que $d(y_1^i, \varphi(x_1^i)) < \varepsilon_i$.
Supposons maintenant avoir démontré le résultat jusqu'au rang $k-1 \leq m-1$.
Cette fois, nous savons que $g_i(\varphi(x_k^i)) < 1 + \varepsilon_i + (2k-1)\varepsilon_i$ (*). De plus, pour tout $l < k$, on sait que $d(\varphi(x_k^i), \varphi(x_l^i)) \geq 2m_i\varepsilon_i$, et $d(y_l^i, \varphi(x_l^i)) < \varepsilon_i$. Ainsi, $d(\varphi(x_k^i), y_l^i) > (2m_i - 1)\varepsilon_i$ pour tout $l < k$.
Il est alors clair que (*) entraîne $g_i(\varphi(x_k^i)) = g_i(y_k^i) + d(y_k^i, \varphi(x_k^i))$, ce qui signifie que $d(y_k^i, \varphi(x_k^i)) < \varepsilon_i$ . $\Diamond$




$$A \geq (1+M) - (1+2\varepsilon) = M - 2\varepsilon$$

$d(\varphi^*(f_i), g_i)$ est au moins aussi grande que l'écart constaté sur les points $\varphi(x_k^i)$ et $y_k^i$.

Posons maintenant $F_0 = X$, $F_i = \overline{\{\varphi^*(f_i) \colon \varphi \in G\}} \subset E(X)$ pour $i \geq 1$, et $Z = \overline{\cup F_i}$ (l'adhérence est prise dans $E(X)$).
Il est important de noter ici que $Z$ est polonais, puisqu'il est fermé dans $E(X)$, qui est complet, et qu'il admet pour ensemble dense $\cup F_i$, qui est séparable.
Il faut également souligner que le lemme 2.1 entraîne que $d(\psi^*(f_i), g_i) \geq \varepsilon_i$ pour tout $\psi \in G$. Par conséquent, $d(F_i, g_i) \geq \varepsilon_i$ pour tout $i$.

**Lemme 2.2.** *Tout élément $\varphi$ de $G$ s'étend (de façon unique) en une isométrie $\varphi^Z$ de $Z$, le morphisme d'extension est continu, et*

$$\{\varphi^Z \colon \varphi \in G\} = \{\varphi \in Iso(Z) \colon \forall i \geq 0 \ \varphi(F_i) = F_i\} \ .$$

**Preuve du lemme 2.2 .**
La première affirmation se démontre facilement : puisque $\varphi^*(F_i) = F_i$ pour tout $\varphi \in G$, on voit que $\varphi^*(Z) = Z$ pour tout $\varphi \in G$. Le fait que cette extension soit unique, et que le morphisme associé soit continu, est une conséquence des résultats généraux exposés au début du chapitre 1.
Par construction, on voit que $\{\varphi^Z \colon \varphi \in G\} \subset \{\varphi \in Iso(Z) \colon \forall i \ \varphi(F_i) = F_i\}$ ; pour démontrer la réciproque, soit $\varphi \in Iso(Z)$ telle que $\varphi(F_i) = F_i$ pour tout $i$.
Alors $\varphi_{|X}$ est une isométrie de $X$ telle que $d\big((\varphi_{|X})^*(f_i), g_i\big) = d(\varphi(f_i), g_i) \geq \varepsilon_i$ pour tout $i \geq 1$, ce qui signifie que $\varphi_{|X} \notin V_{\varphi_i}$ pour tout $i \geq 1$, et donc que $\varphi_{|X} \in G$, ce qui conclut la preuve du lemme. $\Diamond$

Pour terminer la preuve du théorème, commençons par nous ramener, sans changer les isométries, au cas où $Z$ est un polonais borné. Par exemple, on remplace la distance $d$ de $Z$ par $\frac{d}{1+d}$.
Nous pouvons donc supposer que diam(Z) $\leq 1$, et l'énoncé du lemme 2.2 reste vrai.

Il ne reste plus qu'à conclure comme dans [GaKe] : considérons un espace métrique $Z \cup \{y_i\}_{i \geq 0}$, dont la distance étend la distance de $Z$, et est définie de la façon suivante :

-$d(y_i, z) = (i+2) + d(z, F_i)$ pour $z \in Z$ ;
-$d(y_i, y_j) = \inf_{z \in Z} d(y_i, z) + d(y_j, z)$ si $i \neq j$.

Soit $Y = Z \cup \{y_i\}$ ; $Y$ est complet, et on va montrer que $G$ est isomorphe à $Iso(Y)$.
En effet, tout $\varphi$ dans $G$ a une unique extension $\varphi^Y$ à $Y$, définie par la formule $\varphi^Y(y_i) = y_i$, $\varphi^Y(z) = \varphi^Z(z)$, pour tout $i \geq 1$ et tout $z \in Z$. De plus, l'application $\varphi \mapsto \varphi^Y$ est continue.

Réciproquement, soit $\psi$ une isométrie de $Y$ ; on a nécessairement $\psi(Z) = Z$ puisque $y \in Y$ est dans $Z$ si, et seulement si, il existe $y' \in Y$ tel que $0 < d(y, y') \leq 1$. On en déduit que $\psi(y_i) = y_i$ pour tout $i \geq 0$.
Puisque $F_i = \{z \in Z\colon d(z, y_i) = i + 2\}$, on doit avoir $\psi(F_i) = F_i$ pour tout $i \geq 0$. Par conséquent, il existe un certain $\varphi \in G$ tel que $\psi_{|Z} = \varphi^Z$, et donc $\psi = \varphi^Y$.

Pour conclure la preuve du théorème (GK), rappelons que tout morphisme continu, bijectif entre deux groupes polonais est nécessairement bicontinu. $\Diamond$

**Remarque.** Considérons maintenant un sous-groupe fermé $H$ de $Iso(X)$, où $X$ est un certain polonais.
On peut appliquer la construction précédente à $H$ ; le groupe d'isométries de l'espace $Z$ ainsi obtenu est isomorphe à $H$, et $X$ (identifié au sous-espace de $Z$ correspondant) est invariant sous l'action de $Iso(Z)$ ; de plus, toute $\varphi \in Iso(Z)$ coïncide sur $X$ avec un certain élément de $H$.
Par conséquent, si l'on appelle $E$ la relation induite sur $X$ par l'action de $H$, et $F$ la relation induite sur $Z$ par l'action de $Iso(Z)$, on voit que $X$ est un espace invariant pour $F$, et que $F_{|X} = E$.

**Corollaire 4.** *Toute action induite par un sous-groupe fermé du groupe d'isométries d'un polonais $X$ par translation se réduit à une action par translation de tout le groupe d'isométries d'un polonais $Y$ sur $Y$.*

La question signalée au début du chapitre devient donc : existe-t-il un métrique polonais $X$ tel que l'action par translation de $Iso(X)$ sur $X$ soit universelle pour les actions de groupes polonais ?

Remarquons maintenant qu'un analogue du théorème (GK) existe pour les groupes métrisables compacts : le groupe d'isométries d'un espace métrique compact est un groupe métrisable compact, et il est naturel, vu l'énoncé du théorème (GK), de se demander si la réciproque est vraie.
C'est le résultat qui est démontré dans la suite de ce chapitre ; la preuve a été obtenue à la suite d'un exposé au groupe de travail de théorie descriptive de Paris 6, et je remercie tout particulièrement Alain Louveau pour ses remarques qui m'ont permis d'obtenir une preuve correcte.

**Théorème 5.** *Tout groupe métrisable compact est isomorphe au groupe d'isométries d'un espace métrique compact.*

**Preuve du théorème 5.**
Là encore, nous pouvons supposer que $G$ a plus de deux éléments. Soit alors $d$

une distance invariante sur $G$ : l'espace métrique $X = (G, d)$ est compact, et $G$ se plonge topologiquement dans $Iso(X)$, via l'application $g \mapsto (x \mapsto g.x)$. Identifions à nouveau $G$ au sous-groupe (fermé) correspondant de $Iso(X)$, et supposons encore que $X$ est de diamètre $\leq 1$.

Choisissons de nouveau, pour toute $\varphi \in Iso(X) \setminus G$, un $V_\varphi$ comme dans le fait 1.
Il existe encore une famille $\{\varphi_i\}_{i\geq 1}$ telle que $Iso(X) \setminus G = \bigcup_{i\geq 1} V_{\varphi_i}$, et on peut encore poser $V_{\varphi_i} = \{\psi \in Iso(X)\colon \forall 1 \leq k \leq m_i \; d(y_k^i, \psi(x_k^i)) < \varepsilon_i\}$.
Pour tout $i \geq 1$, on définit des applications $f_i,\ g_i \in E(X)$ qui diffèrent légèrement de celles que nous avons considérées dans la preuve précédente :

$$f_i(x) = \min\big(\min_{1\leq k\leq m_i}(1 + \frac{1}{2^i} + d(x, x_k^i) + 2(k-1)\varepsilon_i), 1 + \frac{1}{2^i} + 2m_i\varepsilon_i\big), \quad \text{et}$$

$$g_i(x) = \min\big(\min_{1\leq k\leq m_i}(1+\frac{1}{2^i} + d(x, y_k^i) + 2(k-1)\varepsilon_i),\ 1+\frac{1}{2^i}+2m_i\varepsilon_i\big)\ .$$

Si $\varphi \in Iso(X)$, on note $\varphi^*$ son (unique) extension à $E(X)$ ; on a

$$\forall\varphi \in Iso(X)\,\forall i \geq 1\ \big(\varphi \in V_{\varphi_i}\big) \Leftrightarrow \big(d(\varphi^*(f_i), g_i) < \varepsilon_i\big)\ .$$

Définissons $Y$ comme l'ensemble des $f \in E(X)$ telles que

$$\exists n\ \exists x_1, \ldots, x_n\ \forall x\ f(x) = \min\big(\min_{1\leq i\leq n}(1 + 2(i-1)\varepsilon + d(x, x_i)), 1 + 2n\varepsilon\big),$$

avec $2n\varepsilon = \min(d(x_i, x_j))$.
(Pour $n = 1$ on obtient $g$ définie par $g(x) = 1$ pour tout $x \in X$.)

**Lemme 2.3.** *$Y$ est compact.*

**Preuve.**
Soit $(h_i)$ une suite d'éléments de $Y$, et $x_1^i, \ldots, x_{n_i}^i$ des points témoignant du fait que $h_i \in Y$.
Alors, ou $(n_i)$ est bornée, ou nous pouvons extraire une sous-suite $(h_{\varphi(i)})$ telle que $n_{\varphi(i)} \to +\infty$.
Dans le second cas, comme $X$ est compact, on a nécessairement $\min\limits_{1\leq j<k\leq n_{\varphi(i)}} d(x_j^{\varphi(i)}, x_k^{\varphi(i)}) \to 0$ quand $n \to +\infty$, par conséquent la définition de $h_i$ garantit que $h_{\varphi(i)} \to g$.
Dans l'autre cas, on peut extraire une sous-suite $h_{\psi(i)}$ telle que $n_{\psi(i)} = n$ pour tout $i$.
On peut supposer que $\min_{1\leq j<k\leq n} d(x_j^{\psi(i)}, x_k^{\psi(i)}) \geq \delta$ pour un certain $\delta > 0$ (sinon, on conclut comme dans le premier cas qu'une sous-suite de $(h_{\psi(i)})$

converge vers $g$).
Mais alors, quitte à extraire $n$ fois de plus, on peut supposer que $x_1^{\psi(i)} \to x_1, \dots, x_n^{\psi(i)} \to x_n$.
Cela entraîne que $\min\limits_{1\leq j<k\leq n} d(x_j^{\psi(i)}, x_k^{\psi(i)}) \to \min\limits_{1\leq j<k\leq n} d(x_j, x_k)$, et cela permet de vérifier que $h_{\psi(i)} \to h$ pour un certain $h \in Y$.

Posons, pour tout $i \geq 1$, $F_i = G^*.\{f_i\}$ (c'est un compact de $E(X)$), et $Z = X \cup Y \cup \bigcup F_i$.
On voit que $Z$ est stable par l'action de $G$, puisque $X$ et les $F_i$ le sont, et que toute isométrie d'un sous-espace de $E(X)$ contenant $Y$, qui stabilise $X$, doit également stabiliser $Y$.

Commençons par montrer que $Z$ est compact : pour cela, il suffit de montrer que toute suite $(z_n)$ d'éléments de $\cup F_i$ admet une sous-suite qui converge vers un certain $z \in Z$.
Par définition, $z_n = \varphi_n(f_{i_n})$ pour un certain $\varphi_n \in G$ et $i_n \in \mathbb{N}$. Puisque $G$ est compact, on peut supposer que $\varphi_n \to \varphi$, donc il suffit de démontrer que $(f_{i_n})$ a une sous-suite qui converge vers un certain $z' \in Z$.
On peut bien sûr supposer que $i_n \to +\infty$. Par définition, $f_{i_n} = \frac{1}{2^{i_n}} + h_n$, pour un $h_n \in Y$ ; puisque $Y$ est compact, et $i_n \to +\infty$, cela suffit à conclure.

La fin de la preuve est très similaire à celle du théorème 2, elle est même un peu plus simple (grâce au fait que les fonctions $f_i, g_i$ ont été choisies avec plus d'attention que précédemment) :
Considérons $k \in E(Z)$ tel que $k(z) = 2\mathrm{diam}(Z) + d(z, X)$, et appelons $K$ l'espace $\{k\} \cup Z$, muni de la distance induite par celle de $E(Z)$.

On voit que $K$ est compact, que tout élément de $G$ s'étend de façon unique en une isométrie de $K$, et que l'extension définit un morphisme continu et injectif de $G$ dans $Iso(K)$.
Il nous suffit donc de démontrer que toutes les isométries de $K$ sont des extensions d'éléments de $G$ ; pour cela, choisissons $\psi \in Iso(K)$.
On a nécessairement $\psi(k) = k$, et donc $\psi(Z) = Z$.
De plus, puisque $X = \{z \in Z \colon d(z,k) = 2\mathrm{diam}(Z)\}$, on doit avoir $\psi(X) = X$.
De même, $F_i = \{z \in Z \colon d(z, X) = 1 + \frac{1}{2^i}\}$, par conséquent $\psi(F_i) = F_i$.
On peut maintenant conclure comme ci-dessus : $\psi_{|X} \notin V_{\varphi_i}$ pour tout $i \geq 1$ , donc $\psi_{|X} \in G$, et la preuve est complète . $\Diamond$

# 3. CONSTRUCTION DE L'ESPACE D'URYSOHN

Dans ce chapitre, on détaille la construction et les propriétés classiques de l'espace d'Urysohn qui ont été brièvement évoquées dans l'introduction.
On présente en particulier la caractérisation de l'espace d'Urysohn $\mathbb{U}$ comme le seul polonais (à isométrie près) ayant la propriété d'injectivité finie ; on développe ensuite quelques conséquences de cette propriété sur la géométrie de $\mathbb{U}$.
Cet exposé des propriétés générales de l'espace d'Urysohn, est tout particulièrement inspiré de [Pe2], [GaKe] et [Gr].

Pour faciliter la compréhension, précisons nos notations :
Si $(X, d)$ est un espace métrique, $r > 0$ et $x \in X$, on désigne par $B(x, r[$ (resp. $B(x, r])$ la boule ouverte (resp. fermée) de rayon $r$ et de centre $x$ ; posons également $S(x, r) = B(x, r] \setminus B(x, r[$.

## 3.1 *Espaces finiment injectifs et propriété d'extension approximative*

On dit qu'un espace métrique $X$ est *finiment injectif* si pour toute paire d'espaces métriques finis $K \subset L$ et toute application isométrique $\varphi \colon K \to X$, il existe une application isométrique $\tilde{\varphi} \colon L \to X$ qui prolonge $\varphi$.
Cette propriété est la base des méthodes employées dans cette thèse pour étudier l'espace d'Urysohn.
On l'utilisera sous la forme équivalente [1] suivante :

**Proposition.** *(Urysohn) Un espace métrique $X$ est finiment injectif si, et seulement si :*

$$\forall A \subset X \text{ fini } \ \forall f \in E(A)\ \exists z \in X\ \forall a \in A\ d(z, a) = f(a).$$

[1] C'est sous cette forme que Urysohn utilise l'injectivité finie dans [Ur], en disant ceci : "Voici la propriété fondamentale de [cet] espace dont, malgré son caractère auxiliaire, les autres propriétés de cet espace sont des conséquences plus ou moins immédiates".

A cause de la proposition précédente, on trouve aussi dans la littérature le nom de *propriété d'extension finie* pour désigner la propriété d'injectivité finie.

**Preuve.**
Supposons que $X$ soit finiment injectif, et posons $A = \{a_1, \dots, a_n\}$ ; alors, l'espace métrique $\{a_1, \dots, a_n\} \cup \{f\}$ (vu dans $E(A)$) contient $\{a_1, \dots, a_n\}$, donc se plonge dans $X$ par une isométrie qui prolonge l'identification des $a_i$ ; l'image de $f$ par cette isométrie a les bonnes distances aux $a_i$.
Pour prouver la réciproque, commençons par remarquer que le cas $A = \emptyset$ montre que $X$ est non vide.
Si maintenant $K, L$ sont des espaces métriques finis non vides avec $K \subset L$, on commence par supposer que $|L \setminus K| = 1$ : soit alors $\varphi \colon K \to \mathbb{U}$ une isométrie. Posons $\varphi(K) = \{x_1, \dots, x_n\}$, $L = K \cup \{l\}$, et $f(x_i) = d(l, \varphi^{-1}(x_i))$.
Il existe $z \in X$ tel que $d(z, x_i) = f(x_i)$ pour tout $i$, et poser $\tilde{\varphi}(l) = z$ permet de définir le prolongement recherché.
Supposons maintenant que $|L \setminus K| = n \geq 1$. En posant $L = K \cup \{l_1, \dots, l_n\}$, il nous suffit d'appliquer $n$ fois le cas $|L \setminus K| = 1$ pour construire un prolongement de $\varphi$ en une application isométrique $\tilde{\varphi} \colon L \to X$. $\Diamond$

La propriété d'injectivité finie a le défaut d'être très "rigide", en apparence tout au moins ; il est donc intéressant pour nos constructions de voir qu'on peut la relaxer un peu :

Un espace métrique $X$ a la *propriété d'extension approximative* si

$$\forall \varepsilon > 0 \ \forall A \subset X \text{ fini }, \ \forall f \in E(A) \ \exists z \in X \ \forall a \in A \ |d(z,a) - f(a)| \leq \varepsilon.$$

**Proposition.** *Si $X$ est polonais, alors $X$ est finiment injectif si, et seulement si, $X$ a la propriété d'extension approximative.*

**Preuve :**
Une implication est claire ; pour prouver l'autre, supposons que $X$ a la propriété d'extension approximative.
Soient $A = \{a_1, \dots, a_n\} \subset X$, et $f \in E(A)$ ; puisque $X$ est complet, il nous suffit de construire une suite $(z_p)$ telle que $|d(z_p, a_i) - f(a_i)| \leq 2^{-p}$ pour tout $i$, et $d(z_p, z_{p+1}) \leq 2^{1-p}$.
Le fait que $X$ a la propriété d'extension approximative permet de définir $z_0$ ; supposons maintenant avoir construit notre suite jusqu'au rang $p$.
Soit $f_p \in E(\{a_1, \dots, a_n\})$ la fonction définie par $f_p(a_i) = d(z, a_i)$ ; par définition de $z_p$ on a $d(f_p, f) \leq 2^{-p}$.

La fonction $g_p$ définie sur $\{a_1, \dots, a_n\} \cup \{z_p\}$ par
$g_p(x_i) = f(a_i)$, $g_p(z_p) = d(f_p, f)$ est une fonction de Katětov.
Il existe donc $z \in X$ tel que $|d(z, a_i) - g_p(a_i)| = |d(z, a_i) - f(a_i)| \leq 2^{-(p+1)}$ et $d(z, z_p) \leq d(f_p, f) + 2^{-(p+1)} \leq 2^{1-p}$.
On peut poser $z_{p+1} = z$, et passer à l'étape suivante de la construction. $\Diamond$

Il est immédiat que le complété d'un espace ayant la propriété d'extension approximative a aussi la propriété d'extension approximative ; par conséquent, le complété d'un espace ayant la propriété d'extension approximative est en fait finiment injectif.
L'intérêt, au moins du point de vue "technique", de la propriété d'extension approximative, est d'ailleurs bien illustré par le fait qu'il est assez désagréable d'essayer de prouver "directement" que le complété d'un espace finiment injectif est finiment injectif.

Nous avons à présent suffisamment d'outils en main pour nous attaquer à l'étude de l'espace d'Urysohn et de sa géométrie.

## 3.2 Construction, premiers résultats

Dans la suite de cette thèse, on appellera *espace d'Urysohn* tout espace métrique polonais finiment injectif. Urysohn a été le premier à construire un tel espace ; il a également montré le résultat suivant, qui justifie (une fois qu'on a prouvé qu'un tel objet existe !) le fait de parler de "l'" espace d'Urysohn :

**Théorème.** *(Urysohn) Si $X$ et $Y$ sont deux espaces d'Urysohn, alors $X$ et $Y$ sont isométriques.*

**Preuve :** Soient $X$, $Y$ deux polonais finiment injectifs.
Fixons $\{x_n\}$ dense dans $X$ et $\{y_n\}$ dense dans $Y$.
Pour construire une isométrie $\varphi$ entre $X$ et $Y$, on procède par va-et-vient (on retrouvera cette preuve dans la suite...) :

**Lemme.** *(va-et-vient)*
*On peut construire deux suites d'ensembles finis $F_X^n \subset X$, $F_Y^n \subset Y$, et des isométries $\varphi_n \colon F_X^n \to F_Y^n$ telles que , pour tout $n \in \mathbb{N}$ :*
*- $F_X^n \subset F_X^{n+1}$ ;*
*- $\varphi_{n+1}$ prolonge $\varphi_n$ ;*
*- $\{x_1, \dots, x_n\} \subset F_X^n$ et $\{y_1, \dots, y_n\} \subset F_Y^n$.*

Le théorème est une conséquence directe du lemme 3.2 : supposons ces deux suites construites, et posons $F_X = \cup F_X^n$, $F_Y = \cup F_Y^n$.

Alors la suite $(\varphi_n)$ permet de définir une isométrie de $F_X$ sur $F_Y$ ; comme $F_X$ (resp. $F_Y$) est dense dans $X$ (resp. $Y$), et que les deux espaces sont complets, cette isométrie s'étend en une isométrie de $X$ sur $Y$. $\diamondsuit$

Il ne nous reste donc qu'à prouver le lemme de va-et-vient : Commençons par poser $F_X^0 = \{x_0\}$, $F_Y^0 = \{y_0\}$, et $\varphi_0(x_0) = y_0$.
Supposons maintenant que, pour un certain entier $n \geq 0$, on ait défini deux suites (croissantes pour l'inclusion) d'ensembles finis $F_X^k \subset X$, $F_Y^k \subset Y$ $(k \leq n)$, et d'isométries $\varphi_k \colon F_X^k \to F_Y^k$ ayant les propriétés désirées.
Si $x_{n+1} \in F_X^n$ et $y_{n+1} \in F_Y^n$, alors on pose $F_X^{n+1} = F_X^n$, $F_Y^{n+1} = F_Y^n$, et $\varphi_{n+1} = \varphi_n$ .
Si $x_{n+1} \notin F_X^n$, on peut trouver $y \in Y$ tel que $d(y, \varphi_n(x)) = d(x_{n+1}, x)$ pour tout $x \in F_X^n$. Posons $F'_X = F_X^n \cup \{x_{n+1}\}$, $F'_Y = F_Y^n \cup \{y\}$.
Si $y_{n+1} \in F'_Y$, on n'a qu'à poser $F_X^{n+1} = F'_X$, $F_Y^{n+1} = F'_Y$, et étendre $\varphi_n$ en posant $\varphi_{n+1}(x_{n+1}) = y$.
Si $y_{n+1} \notin F'_Y$, on peut trouver $x \in X$ tel que $d(x, \varphi_n^{-1}(y)) = d(y_{n+1}, y)$ pour tout $y \in F'_Y$ ; il ne reste qu'à poser $F_X^{n+1} = F'_X \cup \{x\}$, $F_Y^{n+1} = F'_Y \cup \{y_{n+1}\}$, et à étendre $\varphi_n$ de la façon naturelle.
On traite de même le cas où $x_{n+1} \in F_X^n$ et $y_{n+1} \notin F_Y^n$. $\diamondsuit$

Il nous reste à construire un espace d'Urysohn ; étant donné les résultats de la section précédente, on peut chercher à construire un espace séparable ayant la propriété d'extension approximative, puis considérer le complété de celui-ci.

C'est comme cela qu'Urysohn a procédé dans [Ur], en construisant l'espace que l'on appelle maintenant *l'espace d'Urysohn rationnel* $\mathbb{QU}$, qui est un espace métrique dénombrable, à distances rationnelles, caractérisé à isométrie près (parmi les espaces dénombrables à distances rationnelles) par la propriété suivante (*propriété d'extension rationnelle*) :

$$\forall A \text{ fini } \subset \mathbb{QU}\ \forall f \in E_{\mathbb{Q}}(A)\ \exists q \in \mathbb{QU}\ \forall a \in A\ d(q,a) = f(a).$$

(où l'on convient, si $D \subset \mathbb{R}$ et $X$ est un espace métrique, que
$E_D(X) = \{f \in E(X) \colon \forall x \in X\ f(x) \in D\}$)

Comme ci-dessus, le va-et-vient permet d'établir que, si un tel espace existe, alors il est unique à isométrie près.
Urysohn donne une construction assez longue de $\mathbb{QU}$, qu'il ne paraît pas utile de retranscrire ici ; en termes modernes, on peut remarquer que la classe des espaces métriques finis à distances rationnelles est une classe de Fraïssé, et

admet donc un ensemble universel, qui est nécessairement ultrahomogène, et a la propriété d'extensions rationnelles.
C'est ce qui pousse, par exemple, les auteurs de [CV] ou [Pe2] à voir la construction d'Urysohn comme un précurseur de la théorie de Fraïssé, avec vingt ans d'avance ! Ceci explicite également les liens entre l'espace d'Urysohn rationnel et d'autres objets universels bien connus, comme par exemple le graphe aléatoire ; le lecteur intéressé est invité à consulter [CV] ou [Pe2] pour plus de détails à ce sujet.
Si on munit le groupe d'isométries de $\mathbb{QU}$ de la topologie produit sur $\mathbb{QU}^{\mathbb{QU}}$ ($\mathbb{QU}$ étant muni de la topologie discrète), on obtient une structure de groupe polonais, et $Iso(\mathbb{QU})$, muni de cette topologie, est isomorphe à un sous-groupe fermé de $S_\infty$ (le groupe des permutations de $\mathbb{N}$, muni de sa topologie polonaise naturelle) ; on calculera plus tard la complexité de la relation de conjugaison entre éléments de $Iso(\mathbb{QU})$.
Considérons maintenant le complété de $\mathbb{QU}$ : puisque $\mathbb{QU}$ a la propriété d'extension rationnelle, un raisonnement similaire à celui de la preuve de la séparabilité de $E(X,\omega)$ permet de montrer que $\mathbb{QU}$ a la propriété d'extension approximative.
Par conséquent, c'est également le cas de son complété, qui est donc finiment injectif. On vient d'obtenir le résultat suivant :

**Théorème.** *(Urysohn) Il existe un espace d'Urysohn.*

La caractérisation des espaces d'Urysohn par la propriété d'injectivité finie a, comme Urysohn l'avait remarqué, énormément de conséquences s'exprimant en termes géométriques.

**Théorème.** *(Huhunaišvili) Tout espace d'Urysohn $U$ est compactement injectif, i.e. pour tout compact $K \subset U$ et toute $f \in E(K)$, il existe $z \in U$ tel que*

$$\forall k \in K \; d(z,k) = f(k) \qquad .$$

**Preuve.**
On va procéder comme dans la preuve de l'équivalence entre propriété d'extension finie et propriété d'extension approximative.
Tout d'abord, fixons un compact $K$, $f \in E(K)$, et $\varepsilon > 0$.
Comme $K$ est précompact,

$$\exists x_1, \ldots, x_n \in K \; \forall x \in K \; \exists i \; d(x, x_i) \leq \varepsilon \ .$$

Puisque $U$ est finiment injectif, il existe $z \in U$ tel que $d(z, x_i) = f(x_i)$ pour tout $i = 1, \ldots, n$. Mais alors, l'inégalité triangulaire implique que $|d(z,x) - f(x)| \leq 2\varepsilon$ pour tout $x \in K$.

En d'autres termes, pour tout compact $K \subset U$, toute fonction $f \in E(K)$ et tout $\varepsilon > 0$, il existe $z \in U$ tel que $|d(z,x) - f(x)| \leq \varepsilon$ pour tout $x \in K$.

Fixons maintenant un compact $K \subset U$ et $f \in E(K)$ ; on peut, grâce à ce qu'on a vu ci-dessus, construire par récurrence une suite $(z_n)$ telle que :
- $\forall n \geq 0\ d(z_n, z_{n+1}) \leq \dfrac{1}{2^{n-1}}$.
- $\forall x \in K\ |d(z_n, x) - f(x)| \leq \dfrac{1}{2^n}$.

La suite $(z_n)$ est de Cauchy par construction, donc converge vers un certain $z$, qui vérifie nécessairement $d(z,x) = f(x)$ pour tout $x \in K$. $\Diamond$

**Corollaire.** *(Huhunaišvili) Si $K$ est compact, et $U$ est un espace d'Urysohn, alors $Iso(U)$ agit transitivement sur l'ensemble des copies isométriques de $K$ contenues dans $U$.*
*En fait, toute isométrie entre copies isométriques de $K$ contenues dans $U$ s'étend en une isométrie de $U$ tout entier.*

**Preuve .**
On applique à nouveau un raisonnement de type va-et-vient.
Commençons par fixer deux copies isométriques $L, M \subset U$ de $K$, et choisissons une isométrie $\varphi \colon L \to M$.
Fixons également $\{x_n\}_{n \geq 1}$ dense dans $U$.

On peut alors construire, en raisonnant comme dans le lemme de va-et-vient, deux suites de compacts $L_n$ et $M_n$, et des isométries $\varphi_n$, tels que :
- $L_0 = L,\ M_0 = M,\ \varphi_0 = \varphi$.
- $L_n \subset L_{n+1}$, et $\varphi_{n+1} \colon L_{n+1} \to M_{n+1}$ est une isométrie qui étend $\varphi_n$.
- $\forall n \geq 1\ \{x_1, \ldots, x_n\} \subset L_n \cap M_n$.

Ceci est suffisant pour construire une isométrie de $\mathbb{U}$ qui prolonge $\varphi$. $\Diamond$

Remarquons qu'on pourrait caractériser les espaces d'Urysohn différemment ; disons qu'un espace métrique polonais $X$ est *$\omega$-homogène* si toute isométrie entre sous-espaces métriques finis de $X$ s'étend en une isométrie de $X$, et *universel* si tout espace métrique polonais se plonge isométriquement dans $X$. On a alors l'équivalence suivante :

**Théorème.** *(Urysohn) Si $X$ est un espace métrique polonais, alors $X$ est finiment injectif si, et seulement si, $X$ est universel et $\omega$-homogène.*

**Preuve.**
On a vu précédemment qu'un espace polonais finiment injectif est nécessairement "compactement homogène", et donc en particulier $\omega$-homogène ;

pour l'universalité, il suffit de remarquer que l'injectivité finie de $X$ permet de plonger isométriquement tout espace métrique dénombrable dans $X$ (en définissant le plongement inductivement). Par conséquent, le théorème de prolongement des isométries implique que tout espace métrique polonais se plonge isométriquement dans $X$.
Pour voir la réciproque, supposons que $X$ soit un espace métrique polonais universel et $\omega$-homogène.
Soient alors $A \subset X$ un ensemble fini, et $f \in E(A)$ ; l'espace métrique $A_f = A \cup \{f\}$ se plonge dans $X$, donc il en existe une copie $A'_f = A' \cup \{z\}$ contenue dans $X$. Par définition de $A_f$, il existe une isométrie $\varphi$ de $A$ sur $A'$ telle que $d(z, \varphi(a)) = f(a)$ pour tout $a$ dans $A$ ; soit $\tilde{\varphi}$ une isométrie de $X$ qui étend $\varphi$. Alors $d(\tilde{\varphi}^{-1}(z), a) = f(a)$ pour tout $a$ dans $A$, ce qui prouve que $X$ est finiment injectif. ♢

**Remarque :** On peut remarquer, comme Holmes le fait dans [Hol], que l'espace d'Urysohn est caractérisé par les propriétés suivantes : à isométrie près, c'est le seul espace métrique séparable, universel et *fortement homogène* (un espace métrique $X$ est dit fortement homogène si toute isométrie entre parties précompactes de $X$ s'étend en une isométrie de l'espace total).
Holmes a également démontré que l'espace d'Urysohn est, à isométrie près, le seul espace métrique séparable $X$ tel que, pour tout compact $K$ et tout sous-ensemble $A \subset K$, tout plongement isométrique de $A$ dans $X$ s'étend en un plongement isométrique de $K$ dans $X$.

On a vu plus haut (sans la détailler vraiment) une construction possible de l'espace d'Urysohn : construire un espace ultrahomogène et universel pour les espaces métriques dénombrables à distances rationnelles, puis considérer le complété de celui-ci. Cet espace, étant le complété d'un espace avec la propriété d'extension approximative, sera finiment injectif.
Il existe une autre façon de construire cet espace, qui est due à Katětov, et qui permet, partant d'un espace métrique $X$, de "construire" une copie de l'espace d'Urysohn "autour" de $X$ ; l'avantage de la construction de Katětov est qu'elle permet de garder la trace des isométries de $X$. Avant de détailler cette construction (qui pourrait également permettre, avec des modifications simples, de donner une construction de $\mathbb{QU}$), il n'est peut-être pas inutile de remarquer ici qu'on ne connaît pas de "modèle" pour l'espace d'Urysohn, i.e. on n'en a pas une réalisation concrète (dans un espace de fonctions, par exemple) ; il serait certainement très intéressant de savoir comment en obtenir une (ceci est le problème ouvert n°12 de [Pe2]). (A ce sujet, le lecteur est invité à consulter [Hol] pour voir à quoi "ressemblent" les fonctions qui forment des sous-espaces de $\mathcal{C}([0,1])$ isométriques à $\mathbb{U}$).

Partons d'un espace métrique polonais $X$ ; on construit par récurrence une suite d'espaces métriques $X_i$, définis par $X_{i+1} = E(X_i, \omega)$ (Ceci a un sens, puisque l'application de Kuratowski permet d'identifier $X_i$ à un sous-espace de $X_{i+1}$).
Alors, les résultats du chapitre 1 permettent de voir que toute isométrie de $X_i$ s'étend de manière unique en une isométrie de $X_{i+1}$, et que ceci définit un morphisme continu de $Iso(X_i)$ dans $Iso(X_{i+1})$.
Par conséquent, si on pose $X_\infty = \cup X_i$, on a défini un morphisme continu $\Psi$ de $Iso(X_0)$ dans $Iso(X_\infty)$, qui a de plus la propriété suivante :
Pour toute isométrie $\varphi \in Iso(X_0)$, $\Psi(\varphi)$ est un prolongement de $\varphi$ (on dit que $X_0$ est *g-plongé* dans $X_\infty$).
Appelons maintenant $Y$ le complété de $X_\infty$ ; par définition, $X_\infty$ est séparable. La construction assure également qu'il est finiment injectif :
Si $x_1, \ldots, x_n \in X_\infty$ et $f \in E(\{x_1, \ldots, x_n\})$, alors $x_1, \ldots, x_n \in X_m$ si $m$ est assez grand ; l'espace $\{x_1, \ldots, x_n\} \cup \{f\}$ est contenu dans $X_{m+1}$, et donc dans $X_\infty$. Par conséquent, le complété $Y$ de $X_\infty$ est un espace d'Urysohn. De plus, pour toute $\varphi \in Iso(X_0)$, $\Psi(\varphi)$ se prolonge par uniforme continuité en une isométrie de $Y$. Ceci définit un morphisme injectif de $Iso(X_0)$ dans $Iso(Y)$. Pour vérifier que ce morphisme est continu, on utilise la proposition bien connue ci-dessous :

**Proposition.** *Si $X$ est un espace métrique, alors le prolongement par uniforme continuité définit un morphisme continu $\Delta$ de $Iso(X)$ dans le groupe d'isométries du complété $\hat{X}$ de $X$.*

**Preuve.**
Il nous suffit de montrer que, si $\varphi_n$ tend vers $\varphi$ dans $Iso(X)$, et $z \in \hat{X}$, alors $\Delta(\varphi_n)(z)$ tend vers $\Delta(\varphi)(z)$. C'est trivialement vrai si $z \in X$.
Soit $z \in \hat{X} \setminus X$. Étant donné $\varepsilon > 0$, il existe $x \in X$ tel que $d(z, x) \leq \varepsilon$ ; pour $n$ suffisamment grand, on a $d(\Delta(\varphi_n(x)), \Delta(\varphi)(x)) \leq \varepsilon$.
L'inégalité triangulaire entraîne que, pour $n$ assez grand,
$d(\Delta(\varphi_n)(z), \Delta(\varphi)(z)) \leq d(\Delta(\varphi_n)(z), \Delta(\varphi_n)(x)) + d(\Delta(\varphi_n)(x), \Delta(\varphi)(x)) + d(\Delta(\varphi)(z), \Delta(\varphi)(x)) \leq 3\varepsilon$ . $\Diamond$

Pour ne pas avoir de problèmes de définition dans la suite, on appellera $\mathbb{U}$ l'espace obtenu en appliquant la construction précédente à $X_0 = \{0\}$. Le raisonnement précédent entraîne que tout espace métrique polonais se g-plonge dans $\mathbb{U}$. Ceci a en particulier pour conséquence le théorème suivant.

**Théorème.** *(Uspenskij) $Iso(\mathbb{U})$ est un groupe polonais universel, i.e. tout groupe polonais est isomorphe à un sous-groupe (nécessairement fermé) de $\mathbb{U}$.*

En effet, le théorème (GK) affirme que tout groupe polonais $G$ est isomorphe au groupe d'isométries d'un certain métrique polonais $X_G$, et un g-plongement de $X_G$ dans $\mathbb{U}$ nous donne un morphisme continu et injectif de $Iso(X_G)$ (autrement dit, de $G$) dans $Iso(\mathbb{U})$, dont on vérifie qu'il est d'image fermée. Par conséquent, c'est un isomorphisme sur son image.

Au chapitre 4, on donne une façon plus "concrète" de voir un groupe polonais comme un sous-groupe de $Iso(\mathbb{U})$ ; explicitement, on démontre que tout groupe polonais est isomorphe au sous-groupe de $Iso(\mathbb{U})$ constitué par les isométries qui laissent fixe un certain fermé $F \subset \mathbb{U}$.

Il est intéressant de remarquer ici qu'on peut, avec le même type de construction, construire beaucoup d'espaces très similaires à $\mathbb{U}$.
En effet, on peut restreindre la propriété d'extension considérée, par exemple ne prendre en compte que les extensions de diamètre borné par un certain réel $d \geq 0$. Alors, en appliquant la construction de Katětov (en restreignant convenablement les extensions considérées), on obtient un espace universel pour la classe d'espaces en question, et $\omega$-homogène.
On parlera d' "espace d'Urysohn pour les espaces de diamètre borné par $d \geq 0$" pour désigner l'espace obtenu en appliquant la construction précédente à la classe correspondante.
Dans le même ordre d'idées, si l'on considère cette fois les espaces métriques dénombrables dont la distance prend ses valeurs dans un certain sous-ensemble dénombrable de $\mathbb{R}^+$ stable par addition, on voit que l'espace $X_\infty$ construit en appliquant la construction de Katětov (en restreignant les extensions considérées) est dénombrable, universel pour la classe d'espace considérée, et ultrahomogène.
On obtient par exemple l'espace $\mathbb{QU}$ en considérant la classe des espaces dénombrables à distances rationnelles.
Tout cela rappelle la construction des limites de Fraïssé (qui utilise également une propriété d'"amalgamation" qui joue un rôle similaire à celui que joue l'amalgame métrique dans la construction de Katětov) ; on est alors amené à se poser la question suivante (signalée par Pestov dans [Pe2]) :

**Question :** (Pestov) Existe-t-il une théorie "à la Fraïssé" pour des structures séparables, permettant par exemples d'obtenir les objets construits ci-dessus comme "limites de Fraïssé séparables" des classes correspondantes de polonais ? (ou l'espace de Hilbert comme "limite" des espaces se plongeant dans un Hilbert, etc.)

**Exemple.** Une sphère $S(z_0, r)$ de $\mathbb{U}$ est l'espace d'Urysohn pour les espaces de diamètre borné par $2r$.

Pour le prouver, il suffit (grâce à la méthode du va-et-vient) de montrer que $S = S(z_0, r)$ est telle que

$$\forall x_1, \ldots, x_n \in S \ \forall f \in E_{[0,2r]}(\{x_1, \ldots, x_n\}) \ \exists z \in S \ \forall i \ d(z, x_i) = f(x_i) \ .$$

C'est une conséquence directe de l'injectivité finie de $\mathbb{U}$ :
Étant donnés $x_1, \ldots, x_n \in S$ et $f \in E_{[0,2r]}(\{x_1, \ldots, x_n\})$, on peut étendre $f$ à $\{x_1, \ldots, x_n\} \cup \{z_0\}$ en posant $\tilde{f}(x_i) = f(x_i)$, et $\tilde{f}(z_0) = r$.
La fonction $\tilde{f}$ ainsi définie est de Katětov, par conséquent il existe $x \in \mathbb{U}$ tel que $d(x, x_i) = f(x_i)$ et $d(x, z_0) = r$, autrement dit $x \in S$ et $d(x, x_i) = f(x_i)$ pour tout $i = 1, \ldots, n$.

De même, l'intersection de $n$ sphères, si elle est non vide, est l'espace d'Urysohn pour les espaces du diamètre correspondant (dont on vérifie sans peine qu'il est égal au double du plus petit rayon de la famille de sphères considérée). On peut remarquer que ceci implique que l'intersection de $n$ sphères, si elle est non vide, est isométrique à la sphère du plus petit rayon !

Une boule non vide n'est pas isométrique à une sphère, par contre : il y a un centre, qui est "privilégié", par conséquent une boule non vide n'est pas homogène (i.e. son groupe d'isométries n'agit pas transitivement).
Les sphères, elles, sont toutes $\omega$-homogènes.

On vérifie de même que, si $z_1, \ldots, z_n \in \mathbb{U}$, alors leur médiatrice

$$Med(z_1, \ldots, z_n) = \{x \in \mathbb{U} \colon \forall i, j \ d(x, z_i) = d(x, z_j)\}$$

est isométrique à $\mathbb{U}$.
Tout d'abord, il est clair que $Med(z_1, \ldots, z_n)$ est non vide.
Ensuite, si $m > 0$, $x_1, \ldots, x_m \in Med(z_1, \ldots, z_n)$, et $f \in E(\{x_1, \ldots, x_m\})$, alors l'extension de Katětov $k(f)$ de $f$ à $\{z_1, \ldots, z_n\} \cup \{x_1, \ldots, x_m\}$ est telle que $k(f)(z_i) = k(f)(z_j)$ pour tout $(i, j)$.
Il existe $x \in \mathbb{U}$ tel que $d(x, .)$ coïncide avec $k(f)$ sur $\{z_1, \ldots, z_n\} \cup \{x_1, \ldots, x_m\}$, et donc $x \in Med(z_1, \ldots, z_n)$ tel que $d(x, x_i) = f(x_i)$ pour tout $i = 1, \ldots, m$.

Puisque nous souhaitons étudier les propriétés géométriques de $\mathbb{U}$, il est naturel de se demander à quoi peuvent "ressembler" les ensembles de points fixes des isométries ; on verra une réponse à cela au chapitre 5, mais il est d'ores et déjà intéressant de remarquer le fait suivant :

**Théorème 6.** *Soit* $\varphi\colon \mathbb{U} \to \mathbb{U}$ *une application isométrique.*
*Si* $\varphi_{|_{B(0,1]}} = id_{B(0,1]}$, *alors* $\varphi = id_{\mathbb{U}}$.

Autrement dit, l'ensemble des points fixes d'une isométrie non triviale est nécessairement d'intérieur vide.
*Note :* V. Pestov m'a signalé que ce résultat était déjà connu de M. Rubin en mai 2003 ; à ma connaissance il n'a jamais été publié.

**Preuve.** On dit que $A \subset \mathbb{U}$ est un *ensemble d'unicité* si

$$\forall x, y \in \mathbb{U}\Big(\big(\forall z \in A\ d(x,z) = d(y,z)\big) \Rightarrow (x = y)\Big).$$

Pour prouver le théorème 6, il suffit de montrer que les boules non vides de $\mathbb{U}$ sont des ensembles d'unicité : admettons cela pour l'instant, et considérons une application isométrique $\varphi\colon \mathbb{U} \to \mathbb{U}$ telle que $\varphi_{|_{B(0,1]}} = id_{B(0,1]}$.
Soit alors $x \in \mathbb{U}$ : on a $d(x,z) = d(\varphi(x), \varphi(z)) = d(\varphi(x), z)$ pour chaque $z \in B(0,1]$, par conséquent $\varphi(x) = x$. $\Diamond$

Bien sûr, si $A \subset B$ et $A$ est un ensemble d'unicité, alors $B$ en est un aussi ; par conséquent, la proposition suivante suffit à démontrer le théorème 6 :

**Proposition 7.** *Soient* $x_1, \ldots, x_n \in \mathbb{U}$ *; supposons que* $f \in E(\{x_1, \ldots, x_n\})$ *soit telle que*

$$\forall i \neq j\ |f(x_i) - f(x_j)| < d(x_i, x_j) \text{ et } f(x_i) + f(x_j) > d(x_i, x_j)\ .$$

*Alors* $K = \{x_1, \ldots, x_n\} \cup \{z \in \mathbb{U}\colon \forall i\ d(z, x_i) = f(x_i)\}$ *est un ensemble d'unicité.*

**Preuve de la proposition 7.**
Soit $x \neq y \in \mathbb{U}$; nous souhaitons prouver qu'il existe $z \in K$ tel que $d(x,z) \neq d(y,z)$. On peut supposer que $d(x, x_i) = d(y, x_i)$ pour tout $i$.
Soit $g \in E(\{x_1, \ldots, x_n\} \cup \{x\} \cup \{y\})$ l'extension de Katětov de $f$ ; on a $g(x) = g(y)$.
Pour $\alpha > 0$ définissons une fonction $g_\alpha$ sur $K$ par :

- $g_\alpha(x_i) = g(x_i)$ pour tout $i$,
- $g_\alpha(y) = g(y)$, et $g_\alpha(x) = g(x) - \alpha$.

L'hypothèse sur $f$ entraîne que, si $\alpha > 0$ est suffisamment petit, alors $g_\alpha \in E(\{x_1, \ldots, x_n\} \cup \{x\} \cup \{y\})$.
Il existe donc un $z \in \mathbb{U}$ qui prend les bonnes distances à $x_1, \ldots, x_n, x, y$, de

sorte que $z \in K$ et $d(z,x) \neq d(z,y)$. $\lozenge$

**Remarque :** Géométriquement, cela signifie que, si $S_1, \ldots, S_n$ sont des sphères de centre $x_1, \ldots, x_n$, aucune paire de ces sphères n'est tangente (intérieurement ou extérieurement), et $\cap S_i \neq \emptyset$, alors $\cap S_i \cup \{x_1, \ldots, x_n\}$ est un ensemble d'unicité.
En particulier, l'union d'une sphère non vide et de son centre est un ensemble d'unicité ; on peut même voir que toute sphère non vide est un ensemble d'unicité.
Comme autre exemple d'ensemble d'unicité, on peut citer $Med(a,b) \cup \{a,b\}$ (et en général $Med(\{x_1, \ldots, x_n\}) \cup \{x_1, \ldots, x_n\}$) ; en fait $Med(a,b) \cup \{a\}$ est un ensemble d'unicité, ce qui n'est bien sûr pas le cas de $Med(a,b)$ !

On pourrait se demander si l'hypothèse sur $f$ dans l'énoncé de la proposition 7 est nécessaire ; pour voir qu'on a besoin d'imposer une condition de ce genre, considérons l'exemple suivant : soient $x_0, x_1 \in \mathbb{U}$ deux points tels que $d(x_0, x_1) = 1$, et $f$ une application de Katětov telle que $f(x_1) = 1$, $f(x_2) = 2$. Alors, pour tout $x$ tel que $d(x, x_0) = d(x, x_1) = \frac{1}{2}$, on doit avoir $f(x) = \frac{3}{2}$, ce qui prouve que $\{x_0, x_1\} \cup \{x \in \mathbb{U} \colon d(x, x_i) = f(x_i)\}$ n'est pas un ensemble d'unicité.

Le théorème 6 montre que les éléments de $Iso(\mathbb{U})$ ont des propriétés de régularité ; en particulier, si une application isométrique $\varphi$ coïncide sur une boule ouverte non vide avec une isométrie $\psi$, alors $\varphi = \psi$. On pourrait alors se demander si, étant données $\varphi, \psi \colon \mathbb{U} \to \mathbb{U}$ deux applications isométriques telles que $\varphi_{|B} = \psi_{|B}$ pour une boule non vide $B$, on doit avoir $\varphi = \psi$.

Bien sûr, c'est le cas si $\varphi(B) = \psi(B)$ est un ensemble d'unicité ; néanmoins, ce n'est pas vrai en général, comme le montre la proposition suivante.

**Proposition 8.** *Soit $B$ une boule fermée de $\mathbb{U}$.*
*Il existe deux applications isométriques $\varphi, \psi \colon \mathbb{U} \to \mathbb{U}$ telles que $\varphi(x) = \psi(x)$ pour tout $x \in B$, et $\varphi(\mathbb{U}) \cap \psi(\mathbb{U}) = \varphi(B) = \psi(B)$.*

**Preuve.**
Il suffit de montrer que ce résultat est vrai pour une boule fermée de $\mathbb{U}$.
C'est une conséquence de l'universalité de $\mathbb{U}$ : soit $X$ l'amalgame métrique de deux copies de $\mathbb{U}$ ($X_1$ et $X_2$) au-dessus de $B(0,1]$, et $\varphi_0$ une isométrie de $X = X_1 \cup X_2$ telle que $\varphi_0(X_1) = X_2$, $\varphi_0^2 = id_X$ et $\varphi_0(x) = x$ pour tout $x \in B(0,1]$.
Choisissons un plongement isométrique $\varphi_1 \colon X \to \mathbb{U}$, et posons $y_0 = \varphi_1(0)$ ; de même, soit $\eta$ une isométrie de $\mathbb{U}$ sur $X_1$, et $x_0 = \eta^{-1}(0)$.

Posons maintenant $\varphi = \varphi_1 \circ \eta$, et $\psi = \varphi_1 \circ \varphi_0 \circ \eta$ ; par définition de $\varphi_0$, $\varphi$ et $\psi$ sont égales sur $\eta^{-1}(B(0,1]) = B(x_0,1]$.
De plus, on a $\varphi(\mathbb{U}) = \varphi_1(X_1)$ et $g(\mathbb{U}) = \varphi_1(X_2)$, donc
$\varphi(\mathbb{U}) \cap \psi(\mathbb{U}) = \varphi_1(X_1 \cap X_2) = \varphi_1(B(0,1]) = \varphi(B(x_0,1]) = \psi(B(x_0,1])$ . ◊

En un sens, la proposition précédente est une illustration du fait que $\mathbb{U}$ contient énormément de copies isométriques de lui-même (par exemple, les médiatrices de $n$ points).
Pour l'instant, toutes les copies isométriques de $\mathbb{U}$ que nous avons vues sont d'intérieur vide. Le théorème suivant, dont la preuve est basée sur une idée de V. Pestov, montre qu'il en existe d'autres.

**Théorème 9.** *Si $X \subset \mathbb{U}$ est fermé et a la propriété de Heine-Borel (pour la distance induite), $M > 0$, alors $\{z \in \mathbb{U} \colon d(z,X) \geq M\}$ est isométrique à $\mathbb{U}$.*

En particulier, $\mathbb{U}$ et $\mathbb{U} \setminus B(0,1[$ sont isométriques.
(Rappelons qu'un espace métrique polonais $X$ a la propriété de Heine-Borel ssi les fermés bornés de $X$ sont compacts).

**Preuve du théorème 9.**
On commence par démontrer le résultat en supposant que $X$ est compact.
Soit alors $Y = \{z \in \mathbb{U} \colon d(z,X) \geq M\}$ ; $Y$ est fermé dans $\mathbb{U}$, donc pour prouver qu'il est isométrique à $\mathbb{U}$ il nous suffit de montrer que $Y$ est finiment injectif.
Soient $y_1, \ldots, y_n \in Y$ et $f \in E(\{y_1, \ldots, y_n\})$.
Il existe un point $c \in \mathbb{U}$ tel que $d(c, y_i) = f(y_i)$ pour tout $i$ ; le problème est qu'on ne peut pas être certain a priori que $d(c,X) \geq M$.
Il faut donc rajouter des conditions sur $c$ : posons $\varepsilon = \min\{f(y_i) \colon 1 \leq i \leq n\}$.
On peut bien sûr supposer $\varepsilon > 0$.
$X$ est compact, donc on peut trouver $x_1, \ldots, x_p \in X$ tels que

$$\forall x \in X \, \exists j \leq p \;\; d(x, x_j) \leq \varepsilon \ .$$

Soit maintenant $g$ l'extension de Katětov de $f$ à $\{y_1, \ldots, y_n\} \cup \{x_1, \ldots, x_p\}$.
Puisque $\mathbb{U}$ est finiment injectif, il existe $c \in \mathbb{U}$ tel que $d(c, y_i) = g(y_i)$ pour tout $i \leq n$ et $d(c, x_j) = g(x_j) = d(x_j, y_{i_j}) + f(y_{i_j}) \geq M + \varepsilon$ pour chaque $j \leq p$.
Comme il existe, pour tout $x \in X$, un certain $j \leq p$ tel que $d(x, x_j) \leq \varepsilon$, l'inégalité triangulaire implique que $d(c,x) \geq d(c,x_j) - d(x_j,x) \geq M$, par conséquent $c \in Y$, ce qui prouve que $Y$ est finiment injectif.
Supposons maintenant que $X$ ait la propriété de Heine-Borel mais ne soit pas compact, et posons encore $Y = \{z \in \mathbb{U} \colon d(z,X) \geq M\}$.

Comme précédemment, il suffit de prouver que $Y$ est finiment injectif ; soient $y_1, \ldots, y_n \in Y$ et $f \in E(\{y_1, \ldots, y_n\})$.
Soit aussi $x \in X$ et $m = f(y_1) + d(y_1, x)$.
Puisque $B(x, M+m] \cap X$ est compact, il existe $c \in \mathbb{U}$ tel que $d(c, y_i) = f(y_i)$ pour tout $i \leq n$, et $d(c, B(x, M+m] \cap X) \geq M$.
Alors, pour tout $x' \in X$, $d(c, x') \geq M$ : en effet, si $d(x', x) \leq M + m$ ceci est vrai par définition de $c$, et si $d(x', x) > M + m$ alors on a $d(c, x') \geq d(x, x') - d(c, x)$, donc $d(c, x') > M$ (rappelons que $d(c, x) \leq f(y_1) + d(y_1, x) = m$). $\Diamond$

**Corollaire 10.** *Il y a une isométrie $\varphi$ de $B(0,1]$ telle qu'aucune isométrie de $\mathbb{U}$ ne coïncide avec $\varphi$ sur $B(0,1]$.*

Pour obtenir le corollaire 10 à partir des résultats précédents, prenons une isométrie $\varphi \colon \mathbb{U} \to \mathbb{U} \setminus B(0,1[$, et choisissons $x \notin B(0,2]$. A cause de l'homogénéité de $\mathbb{U} \setminus B(0,1[$, il existe une isométrie $\psi$ de $\mathbb{U} \setminus B(0,1[$ telle que $\psi(\varphi(x)) = x$. Ainsi, en composant si nécessaire $\varphi$ avec $\psi$, on peut supposer que $x$ est un point fixe de $\varphi$. Mais alors $\varphi$ doit envoyer la boule de centre $x$ et de rayon 1 (dans $\mathbb{U}$) sur la boule de centre $x$ et de rayon 1 (dans $\mathbb{U} \setminus B(0,1[$).
Puisque ces deux boules coïncident par choix de $x$, on voit que $\varphi_{|_{B(x,1]}}$ est une isométrie de $B(x,1]$ ; cependant le théorème 6 montre qu'aucune isométrie de $\mathbb{U}$ ne peut coïncider avec $\varphi$ sur $B(x,1]$. $\Diamond$

(En utilisant l'injectivité finie de $\mathbb{U}$ et la continuité automatique des morphismes Baire-mesurables entre groupes polonais, on peut donner une preuve directe, mais un peu plus longue, du corollaire 10).

**Question.** Il est naturel, au vu du théorème précédent, de se demander s'il existe des isométries $\varphi \colon B(0,1] \to B(0,1]$ qu'on ne puisse pas étendre du tout ; plus généralement, peut-on caractériser les sous-ensembles $M$ de $\mathbb{U}$ "maximaux" pour une certaine isométrie, i.e. tels qu'il existe $\varphi \in Iso(M)$ qu'on ne puisse pas prolonger en une isométrie définie sur $M' \supsetneq M$ ?

# 4. UNE FAÇON DE REPRÉSENTER TOUT GROUPE POLONAIS COMME UN SOUS-GROUPE DE $ISO(\mathbb{U})$

On a évoqué au chapitre précédent le résultat d'Uspenskij selon lequel tout groupe polonais est isomorphe à un sous-groupe fermé de $Iso(\mathbb{U})$.

Comme l'ont remarqué Gao et Kechris dans [GaKe], une variation sur la construction de Katětov permet de montrer que, pour tout groupe polonais $G$, il existe une suite croissante de fermés $(F_n)$ de $\mathbb{U}$ telle que $G$ soit isomorphe à $\{\varphi \in Iso(\mathbb{U}) \colon \forall n \ \varphi(F_n) = F_n\}$ .
Cela les a amenés à se demander si l'on pouvait améliorer le résultat précédent en remplaçant la suite $(F_n)$ par un seul fermé $F$.

Le théorème suivant apporte une réponse positive à cette question ; plusieurs conversations avec Mathieu Florence alors que je cherchais à le démontrer m'ont beaucoup aidé, et je le remercie d'avoir pris le temps de réfléchir à ce problème et de me faire part de ses idées.

**Théorème 11.** *Soit $G$ un groupe polonais. Il existe un fermé $F \subset \mathbb{U}$ tel que $G$ soit isomorphe (comme groupe topologique) à $\{\varphi \in Iso(\mathbb{U}) \colon \varphi(F) = F\}$.*

En termes de théorie descriptive, ce théorème a une conséquence qui mérite d'être évoquée.
Si l'on munit $\mathcal{F}(\mathbb{U})$ de la structure borélienne d'Effros, rappelons que l'action par translation de $Iso(\mathbb{U})$ sur $\mathcal{F}(\mathbb{U})$ (définie par $\varphi \cdot F = \varphi(F)$) est borélienne. Comme on l'a vu dans l'introduction, Gao et Kechris ont prouvé que la relation associée $\simeq_i^{\mathbb{U}}$ est universelle pour les relations induites par une action borélienne d'un groupe polonais.

On sait donc que l'action par translation de $Iso(\mathbb{U})$ sur $\mathcal{F}(\mathbb{U})$ est extrêmement compliquée ; en un sens, le théorème précédent illustre cette complexité, puisqu'il signifie que tout groupe polonais est isomorphe au stabilisateur d'un certain fermé pour cette action.
Il peut également être intéressant de remarquer ici que des résultats généraux de théorie descriptive (cf [Ke1]) entraînent que l'application qui à $F \in \mathcal{F}(\mathbb{U})$ associe son stabilisateur (vu dans l'ensemble des sous-groupes polonais de

$Iso(\mathbb{U})$, muni de sa structure borélienne naturelle) n'est pas borélienne : si elle l'était, la relation $\preceq_i^U$ serait borélienne, ce qui n'est pas le cas.

Avant de commencer la preuve du théorème 11, il est utile d'introduire une notation.
Si $Y$ est un sous-ensemble borné, non vide de l'espace métrique $X$, posons

$$E(X,Y) = \{f \in E(X) \colon \exists d \in \mathbb{R}^+ \ \forall x \in X \ f(x) = d + d(x,Y)\}$$

$E(X,Y)$ est fermé dans $E(X)$, et est isométrique à $\mathbb{R}^+$.

**Preuve du théorème 11.**
Soit $G$ un groupe polonais ; nous avons vu au chapitre précédent qu'il existe un espace métrique $X$ tel que $Iso(X)$ est isomorphe à $G$ ; dans la suite on identifie $G$ et $Iso(X)$.
On peut supposer que $X$ contient plus de deux points et est borné, de diamètre plus petit que 1.

Après avoir posé $X_0 = X$, on définit par récurrence une suite d'espaces métriques polonais bornés $X_i$, de diamètre $d_i$, par :

$$X_{i+1} = \Big\{f \in \overline{E(X_i,\omega)} \cup \bigcup_{j<i} E(X_i,X_j) \colon \forall x \in X_i \ f(x) \leq 2d_i\Big\}$$

(On munit $X_{i+1}$ de la distance du sup ; puisque la fonction de Kuratowski donne un plongement isométrique de $X_i$ dans $X_{i+1}$, on identifie $X_i$ au sous-espace correspondant de $X_{i+1}$).
Alors on voit que $d_i \to +\infty$ avec $i$, et que chaque $X_i$ est un espace métrique polonais. Appelons $Y$ le complété de $\bigcup_{i \geq 0} X_i$.
La définition de la suite $(X_i)$ entraîne que $\cup X_i$ est finiment injectif, par conséquent $Y$ est isométrique à $\mathbb{U}$.
De plus, toute isométrie $g \in G$ s'étend en une isométrie de $X_i$, et pour tout $i \in \mathbb{N}$ et tout $g \in G$ il existe une unique isométrie $g^i$ de $X_i$ telle que $g^i(X_j) = X_j$ pour tout $j \leq i$ et ${g^i}_{|X_0} = g$ (ceci se montre facilement par récurrence en utilisant les résultats du chapitre 1).
Il est important de souligner que les applications $g \mapsto g^i$, de $G$ dans $Iso(X_i)$, sont continues (même preuve que dans [Us3]).
Ceci nous permet d'associer à chaque $g \in G$ une isométrie $g^*$ de $Y$, définie par ${g^*}_{|X_i} = g^i$, et de définir ainsi un plongement de $G$ dans $Iso(Y)$ .

Remarquons également que, si $f \in X_{i+1}$ est définie par
$f(x) = d + d(x,X_j)$ pour un $d \geq 0$ et un $j < i$, alors $g^*(f) = f$ pour tout

$g \in G$ (C'était en partie le but de la définition de $X_i$ : ajouter "beaucoup" de points fixes sous l'action de $G$).
La construction entraîne qu'une isométrie $\varphi$ de $Y$ est égale à $g^*$ pour un certain $g \in G$ si, et seulement si, $\varphi(X_n) = X_n$ pour tout $n$.
L'idée de la preuve est maintenant de définir un fermé $F$ tel que $\varphi(F) = F$ si, et seulement si, $\varphi(X_n) = X_n$ pour tout $n$.
Pour cela, on va réaliser $F$ comme un ensemble de "témoins" judicieusement choisis.
Commençons par fixer une énumération $(k_i)_{i\geq 1}$ des entiers positifs, dans laquelle chaque entier apparaît une infinité de fois.
En utilisant la définition de $X_i$, on peut choisir par récurrence, pour $i \geq 1$, des points $a_i \in \cup_{n\geq 1} X_n$( les témoins), des réels positifs $e_i$, et une suite croissante d'entiers $(j_i)$ tels que :

- $e_1 \geq 4;\ \forall i \geq 1\ e_{i+1} > 4e_i$ .
- $\forall i \geq 1\ j_i \geq k_i\,,\quad a_i \in X_{j_i+1}$ et $\forall x \in X_{j_i}\ d(a_i, x) = e_i + d(x, X_{k_i-1})$ .
- $\forall i \geq 1\ \forall g \in G\ g^*(a_i) = a_i$.

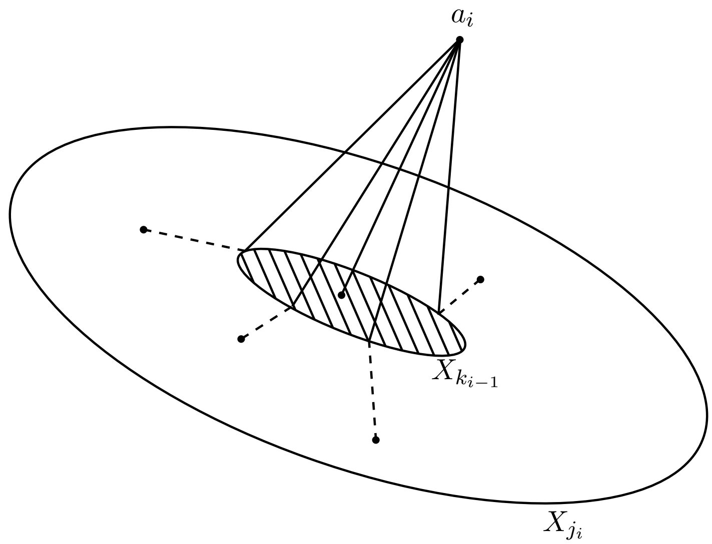
(C'est possible, puisqu'à l'étape $i$ il suffit de fixer $e_i > \max(4e_{i-1}, \mathrm{diam}(X_{k_i}))$, puis de trouver $j_i > j_{i-1}$ tel que $\mathrm{diam}(X_{j_i}) \geq e_i$, et enfin de définir $a_i \in X_{j_i+1}$ par l'équation ci-dessus ; alors, par définition de $g^*$ et de $a_i$, on voit que $g^*(a_i) = a_i$ pour tout $g \in G$).
Posons maintenant $F = X_0 \cup \{a_i\}_{i\geq 1}$ ; puisque $X_0$ est complet, et $d(a_i, X_0) = e_i \to +\infty$, $F$ est fermé dans $Y$.
Nous souhaitons prouver que pour toute $\varphi \in Iso(Y)$, on a

$$(\varphi(F) = F) \iff (\varphi \in G^*).$$

Une de ces implications est une conséquence directe de la définition de $F$.
Pour prouver la réciproque, on utilise le lemme suivant :

**Lemme 4.1.** *Si $\varphi \in Iso(F)$, alors $\varphi(X_0) = X_0$, donc $\varphi(a_i) = a_i$ pour tout $i$. De plus, il existe $g \in G$ (nécessairement unique) tel que $\varphi = g^*_{|F}$.*

L'idée derrière la définition des $a_i$ est que, si un point de $X_{j_i}$ est envoyé dans $X_{k_{i-1}}$ par $\varphi \in Iso(Y)$, alors on doit avoir $\varphi(a_i) \neq a_i$ (c'est pourquoi on a employé plus haut le terme de "témoin" pour désigner les $a_i$) ; mais les distances entre les $a_i$ sont choisies de telle façon que chaque isométrie de $F$ doit fixer tous les $a_i$, comme le montre le lemme 4.1.




$X_{j_i}$ "vu depuis" $a_i$ ; tous les traits pleins sont de longueur $e_i$, les traits en pointillés représentent les distances entre des points de $X_{j_i}$ (pris au hasard) et $a_i$.

**Preuve du lemme 4.1 :**
Puisque $X_0$ a plus de deux éléments et $\text{diam}(X_0) \leq 1$, la définition de $F$ entraîne que

$$\forall x \in F \ (x \in X_0) \Leftrightarrow (\exists y \in F \ \ 0 < d(x,y) \leq 1)$$

Le côté droit de cette équivalence est invariant sous l'action des isométries de $F$, ce qui montre que $\varphi(X_0) = X_0$ pour toute $\varphi \in Iso(F)$. Ceci entraîne que $\varphi(a_i) = a_i$ pour tout $i \geq 1$.
Il existe un certain $g \in G$ tel que $g = \varphi_{|X_0}$, et nous venons de montrer que $\varphi = g^*{}_{|F}$. $\Diamond$

Tout d'abord, le lemme 4.1 entraîne que $G$ est isomorphe au groupe d'isométries de $F$, et que chaque isométrie de $F$ s'étend à $Y$ ; de plus, le prolongement définit un morphisme continu de $Iso(F)$ dans $Iso(Y)$.
Par conséquent, pour finir la preuve du théorème 11, il nous suffit de montrer que chaque isométrie de $F$ admet un seul prolongement à $Y$.
Les résultats précédents entraînent qu'il est suffisant de montrer que, si $\varphi \in Iso(Y)$ est telle que $\varphi(F) = F$, alors $\varphi(X_n) = X_n$ pour tout $n \geq 0$.

Considérons donc $\varphi \in Iso(Y)$ telle que $\varphi(F) = F$.
Il suffit de montrer que $\varphi(X_n) \supseteq X_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ (puisque ceci sera également vrai pour $\varphi^{-1}$) ; supposons que ce ne soit pas le cas, c'est-à-dire qu'il existe $n \in \mathbb{N}$ et $x \notin X_n$ tels que $\varphi(x) \in X_n$.

Soit $\delta = d(x, X_n) > 0$ ($X_n$ est complet) ; choisissons $y \in \cup X_m$ tel que $d(x,y) \leq \frac{\delta}{4}$.
Alors $y \in X_m \setminus X_n$ pour un certain $m > n$ ; prenons maintenant un $i$ tel que $k_i = n+1$ et $j_i \geq m$ .
On a alors $d(\varphi(y), \varphi(a_i)) = d(y, a_i) = e_i + d(y, X_n) \geq e_i + \frac{3\delta}{4}$, et
$d(a_i, \varphi(y)) \leq d(a_i, \varphi(x)) + d(x,y) \leq e_i + \frac{\delta}{4}$, donc $d(\varphi(a_i), a_i) \geq \frac{\delta}{2}$, et ceci contredit le lemme 4.1. $\Diamond$

# 5. POINTS FIXES DES ISOMÉTRIES

On utilise ici les outils introduits précédemment - en particulier les fonctions de Katětov et le fait que $\mathbb{U}$ est compactement injectif - pour étudier les propriétés des ensembles de points fixes des éléments de $Iso(\mathbb{U})$.
Si $\varphi \in Iso(\mathbb{U})$, appelons $Fix(\varphi)$ l'ensemble de ses points fixes.
Puisque la classe d'isométrie de $Fix(\varphi)$ est un invariant de la classe de conjugaison de $\varphi$, on peut espérer obtenir des informations sur le problème de classification des isométries de $\mathbb{U}$ à conjugaison près en étudiant les ensembles de points fixes d'isométries.
Clemens, cité par Pestov dans [Pe2], avait conjecturé que cet invariant était extrêmement faible : explicitement, il conjecturait que, si $\varphi \in Iso(\mathbb{U})$, alors $Fix(\varphi)$, s'il est non vide, est isométrique à $\mathbb{U}$.
Il s'avère que cela est faux en général ; la preuve permet de donner une borne inférieure pour la complexité du problème de classification des éléments de $Iso(\mathbb{U})$ à isométrie près, et de calculer celle du problème de classification des éléments de $Iso(\mathbb{QU})$ à conjugaison près.

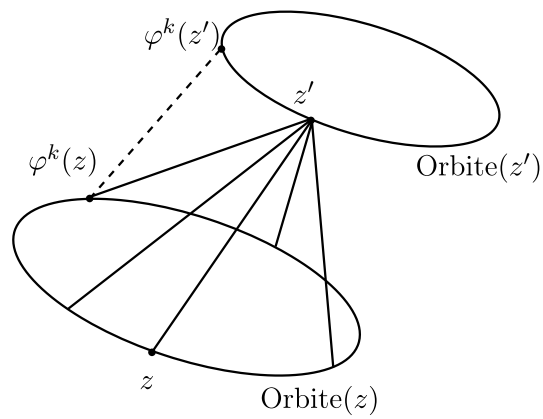
On commence par montrer que, sous des hypothèses (beaucoup) plus fortes, la conjecture de Clemens est vraie.

## 5.1 Cas des isométries à orbites précompactes

**Théorème 12.** *Soit $\varphi \in Iso(\mathbb{U})$ une isométrie à orbites précompactes. Alors $Fix(\varphi)$, s'il est non vide, est isométrique à $\mathbb{U}$.*

En particulier, la dichotomie ci-dessus s'applique aux isométries d'ordre fini, i.e. telles que $\varphi^n = id_{\mathbb{U}}$ pour un certain $n \in \mathbb{N}$ ; on voit donc que l'ensemble des points fixes est un invariant extrêmement faible pour la relation de conjugaison entre éléments d'ordre fini de $Iso(\mathbb{U})$.
Avant de commencer la preuve, il ne semble pas inutile de souligner la conséquence suivante de l'inégalité triangulaire qui, bien qu'évidente, est à la base de la construction qui suit :

$$\forall z \in \mathbb{U}\ \forall x \in \mathbb{U}\ d(z, \varphi(z)) \leq d(z, x) + d(z, \varphi(x)).$$




Comment contrôler les diamètres des orbites des points :
Si $z'$ est à distance constante = 1/2 diam(Orbite($z$)) de tous les points de Orbite($z$), alors diam(Orbite($z'$)) est plus petit que diam(Orbite($z$))

Si $\varphi\colon \mathbb{U} \to \mathbb{U}$ est une isométrie, et $x \in \mathbb{U}$, on pose $\rho_\varphi(x) = \text{diam }\{\varphi^n(x)\}_{n\in\mathbb{Z}}$ ; quand il n'y a pas de risque de confusion, on le note simplement $\rho(x)$.

**Lemme 5.1.** *Soient $x_1, \ldots, x_m \in Fix(\varphi)$, $f \in E(\{x_1, \ldots, x_m\})$, et $z \in \mathbb{U}$, tels que $min\{f(x_i)\} \geq \rho_\varphi(z) > 0$.*
*Soient $A = \{i \in [1, m] \colon d(z, x_i) < f(x_i) - \frac{\rho_\varphi(z)}{2}\}$,*
*$B = \{i \in [1, m] \colon d(z, x_i) > f(x_i) + \frac{\rho_\varphi(z)}{2}\}$, et*
*$C = \{i \in [1, m] \colon |d(z, x_i) - f(x_i)| \leq \frac{\rho_\varphi(z)}{2}\}$.*
*Soit $g \colon \{\varphi^n(z)\}_{n\in\mathbb{Z}} \cup \{x_i\}_{i=1,\ldots,m} \to \mathbb{R}$ définie par les formules suivantes :*
*- $\forall n \in \mathbb{Z}\ g(\varphi^n(z)) = \frac{\rho_\varphi(z)}{2}$,*
*- $\forall i \in A\ g(x_i) = d(z, x_i) + \frac{\rho_\varphi(z)}{2}$,*
*- $\forall i \in B\ g(x_i) = d(z, x_i) - \frac{\rho_\varphi(z)}{2}$,*
*- $\forall i \in C\ g(x_i) = f(x_i)$.*
*Alors $g$ est une fonction de Katětov ; par conséquent, si l'orbite de $z$ est pré-compacte, il existe $z' \in \mathbb{U}$ tel que $d(z', .) = g$ sur $\{\varphi^n(z)\}_{n\in\mathbb{Z}} \cup \{x_i\}_{1\leq i\leq n}$. En particulier $\rho_\varphi(z') \leq \rho_\varphi(z)$.*

**Preuve du lemme 5.1.**
Pour simplifier les notations, posons $\rho = \rho_\varphi(z)$.
Pour vérifier que les équations précédentes définissent une fonction de Katětov, commençons par vérifier que $g$ est 1-lipschitzienne.

On sait que $|g(x_i) - g(\varphi^n(z))| = |d(z, x_i) + \alpha - \frac{\rho}{2}|$, où $|\alpha| \leq \frac{\rho}{2}$.
Si $\alpha = \frac{\rho}{2}$ il n'y a rien à prouver, autrement on sait que $d(z, x_i) \geq f(x_i) - \frac{\rho}{2}$, et donc que $d(z, x_i) \geq \frac{\rho}{2}$, ce qui suffit à montrer que
$|d(z, x_i) + \alpha - \frac{\rho}{2}| \leq d(z, x_i) = d(\varphi^n(z), x_i)$.
Considérons maintenant $1 \leq i, j \leq m$ et supposons, sans perte de généralité, que $|g(x_i) - g(x_j)| = g(x_i) - g(x_j)$ ; il y a trois cas non triviaux à considérer :

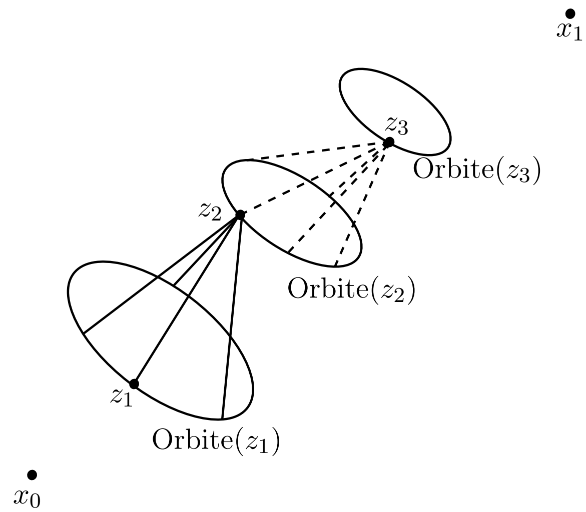
(a) $g(x_i) = d(z, x_i) + \alpha$, $g(x_j) = d(z, x_j) + \beta$, avec $\alpha > \beta \geq 0$. Alors $g(x_j) = f(x_j)$, et $g(x_i) \leq f(x_i)$, donc $g(x_i) - g(x_j) \leq f(x_i) - f(x_j) \leq d(x_i, x_j)$.
(b) $g(x_i) = d(z, x_i) + \alpha$, $g(x_j) = d(z, x_j) - \beta$, avec $0 \leq \alpha, \beta \leq \frac{\rho}{2}$. Alors $g(x_i) \leq f(x_i)$ et $g(x_j) \geq f(x_j)$, donc $g(x_i) - g(x_j) \leq f(x_i) - f(x_j) \leq d(x_i, x_j)$.
(c) $g(x_i) = d(z, x_i) - \alpha$, $g(x_j) = d(z, x_j) - \beta$, $0 \leq \alpha < \beta$. Alors $g(x_i) = f(x_i)$, et $g(x_j) \geq f(x_j)$, donc $g(x_i) - g(x_j) \leq f(x_i) - f(x_j)$.

Vérifions maintenant les inégalités restantes :
- $g(\varphi^n(z)) + g(\varphi^m(z)) = \rho \geq d(\varphi^n(z), \varphi^m(z))$ par définition de $\rho$ ;
- $g(\varphi^n(z)) + g(x_i) = \frac{\rho}{2} + d(z, x_i) + \alpha$, où $|\alpha| \leq \frac{\rho}{2}$, donc
$g(\varphi^n(z)) + g(x_i) \geq d(z, x_i) = d(\varphi^n(z), x_i)$.
Les dernières inégalités sont celles qui concernent $x_i, x_j$ ; on sépare à nouveau la preuve en sous-cas, dont seulement deux ne sont pas immédiats :
(a) $g(x_i) = d(z, x_i) + \alpha$ et $g(x_j) = d(z, x_j) - \beta$, avec $0 \leq \alpha < \beta$. Alors $g(x_i) = f(x_i)$, et $g(x_j) \geq f(x_j)$, donc $g(x_i) + g(x_j) \geq d(x_i, x_j)$.
(b) $g(x_i) = d(z, x_i) - \alpha$, $g(x_j) = d(z, x_j) - \beta$ : on sait alors que $g(x_i) \geq f(x_i)$ et $g(x_j) \geq f(x_j)$, ce qui suffit à conclure. $\diamondsuit$

Le lemme technique qui précède permet de démontrer le résultat suivant, qui suffit presque à montrer que $Fix(\varphi)$ est finiment injectif :

**Lemme 5.2.** *Soit $\varphi$ une isométrie de $\mathbb{U}$ à orbites précompactes, $x_1, \ldots, x_m \in Fix(\varphi)$, $f \in E(\{x_1, \ldots, x_m\})$, et $\varepsilon > 0$. Alors une (au moins) des affirmations suivantes est vraie :*
*- Il existe $z \in \mathbb{U}$ tel que $\rho_\varphi(z) \leq \varepsilon$ et $d(z, x_i) = f(x_i)$ pour tout $i = 1, \ldots, m$.*
*- Il existe $z \in Fix(\varphi)$ tel que $|f(x_i) - d(z, x_i)| \leq \varepsilon$ pour tout $i = 1, \ldots, m$.*

**Remarque :** En fait, on va montrer que la deuxième assertion est toujours vraie ; on pourrait donc penser qu'il y a une façon plus simple de présenter la preuve. C'est peut-être le cas, mais je ne suis pas arrivé à rédiger une preuve rigoureuse sans passer par cette étape intermédiaire.




Construction de la suite $(z_i)$ ; ici, on cherche par exemple à obtenir $z$ tel que $d(x_1, z) = 1$, $d(x_0, z) = 3$ , et diam(Orbite($z$)) $\leq \varepsilon$.
(Pour que le dessin soit lisible, on a exagéré les tailles des orbites des $z_i$ )

**Preuve du lemme 5.2 :**
Soient $x_1, \dots, x_m \in Fix(\varphi)$, $f \in E(\{x_1, \dots, x_m\})$, et $\varepsilon > 0$ ; on peut supposer que $\varepsilon < \min\{f(x_i) \colon i = 1, \dots, m\}$.
On peut également supposer que

$$\gamma = \inf \Big\{ \sum_{i=1}^{m} |f(x_i) - d(x, x_i)| \colon x \in Fix(\varphi) \Big\} > 0 \ .$$

Soit alors $x \in Fix(\varphi)$ tel que $\sum_{i=1}^{m} |f(x_i) - d(x, x_i)| \leq \gamma + \frac{\varepsilon}{4}$.
Choisissons un point $z$ tel que :
- $d(z, x) = \frac{\varepsilon}{2}$ ;
- $\forall i = 1, \dots, m \ |d(x, x_i) - f(x_i)| \leq \frac{\varepsilon}{2} \Rightarrow d(z, x_i) = f(x_i)$ ;
- $\forall i = 1, \dots, m \ d(x, x_i) \geq f(x_i) + \frac{\varepsilon}{2} \Rightarrow d(z, x_i) = d(x, x_i) - \frac{\varepsilon}{2}$ ;
- $\forall i = 1, \dots, m \ d(x, x_i) \leq f(x_i) - \frac{\varepsilon}{2} \Rightarrow d(z, x_i) = d(x, x_i) + \frac{\varepsilon}{2}$.

(on vérifie comme ci-dessus que ces formules définissent bien une fonction de Katětov ; remarquons que $z$ ne peut pas être un point fixe pour $\varphi$, puisque cela contredirait la définition de $\gamma$, ou le fait que $\gamma > 0$)

On utilise maintenant le lemme 5.1 pour construire une suite $(z_n)$ d'éléments de $\mathbb{U}$ de façon à ce qu'elle converge vers un point $z$ qui soit fixe et dont la fonction distance associée $\delta_z$ approche $f$ mieux que $\delta_x$, ou vers un point tel que $\delta_z = f$ sur $\{x_1, \dots, x_m\}$ et $\rho_\varphi(z) \leq \varepsilon$.

Pour cela, on utilise les conditions suivantes :

(0) $z_0 = z$ ;
(1) $0 < \rho(z_n) \leq \varepsilon$ ;
(2) $\forall p \in \mathbb{Z}\ d(z_{n+1}, \varphi^p(z_n)) = \frac{\rho(z_n)}{2}$ ;
(3) $\forall i \in A_n\ d(z_{n+1}, x_i) = d(z_n, x_i) + \frac{\rho(z_n)}{2}$ ;
(4) $\forall i \in B_n\ d(z_{n+1}, x_i) = d(z_n, x_i) - \frac{\rho(z_n)}{2}$ ;
(5) $\forall i \in C_n\ d(z_{n+1}, x_i) = f(x_i)$ .
(avec $A_n = \{i \in [1,m] \colon d(z_n, x_i) < f(x_i) - \frac{\rho(z_n)}{2}\}$, $B_n = \{i \in [1,m] \colon d(z_n, x_i) > f(x_i) + \frac{\rho(z_n)}{2}\}$, et $C_n = \{i \in [1,m] \colon |f(x_i) - d(z_n, x_i)| \leq \frac{\rho(z_n)}{2}\}$)

On commence par vérifier que toutes les conditions sont vérifiées au rang (0) ; il suffit de voir que $z_0$ vérifie (1), ce qui est une conséquence de l'inégalité triangulaire.
Supposons maintenant que la suite soit construite jusqu'au rang $n \geq 0$ : puisque $\{x_1, \ldots, x_m\}, z_n, f$ satisfont aux hypothèses du lemme 5.1, on peut trouver un point $z'$ avec les distances ci-dessus à $\{\varphi^p(z_n)\} \cup \{x_1, \ldots, x_m\}$.
Comme précédemment, $z'$ ne peut être fixe, car cela contredirait la définition de $\gamma$ ; on pose alors $z_{n+1} = z'$.
Si on n'obtient pas en un nombre fini d'étapes un point $z_n$ tel que $\rho(z_n) \leq \varepsilon$ et $d(z_n, x_i) = f(x_i)$ pour tout $i = 1, \ldots, m$, alors $A_n$ ou $B_n$ est non-vide pour tout $n$ ; donc (3) et (4) entraînent la convergence de $\sum \rho(z_n)$.
Par conséquent, $(z_n)$ converge vers un certain point fixe $z^\infty$.
Il existe nécessairement un $i$ tel que $|d(z_0, x_i) - f(x_i)| \leq |d(x, x_i) - f(x_i)| - \frac{\varepsilon}{2}$, donc $\sum_{i=1}^m |f(x_i) - d(z_0, x_i)| \leq \gamma - \frac{\varepsilon}{4}$.
Par construction, $\sum_{i=1}^m |f(x_i) - d(z^\infty, x_i)| \leq \sum_{i=1}^m |f(x_i) - d(z_0, x_i)|$, ce qui contredit la définition de $\gamma$. $\diamondsuit$

Ceci n'est pas encore tout à fait suffisant pour produire des points fixes avec des distances fixées à un certain ensemble fini de points fixes ; le lemme suivant est le dernier outil qui nous manque :

**Lemme 5.3.** *Soit $\varphi$ une isométrie de $\mathbb{U}$ à orbites précompactes, $x \in \mathbb{U}$ tel que $\rho_\varphi(x) \leq 2\varepsilon$ , et supposons que $Fix(\varphi) \neq \emptyset$.*
*Alors il existe $y \in \mathbb{U}$ tel que :*
*- $\forall n \in \mathbb{Z}\ d(y, \varphi^n(x)) = d(y, x) \leq \varepsilon$ ;*
*- $\rho_\varphi(y) \leq \varepsilon$.*

**Preuve du lemme 5.3.**
Soient $x, \varphi$ comme ci-dessus ; posons

$$E = \{y \in \mathbb{U} \colon \forall n \in \mathbb{Z}\ d(y, \varphi^n(x)) = d(y, x) \text{ et } \rho_\varphi(y) \leq \varepsilon\} .$$

Puisque tout point fixe de $\varphi$ appartient à $E$, $E$ est non-vide par hypothèse. Soit maintenant $\alpha = \inf\{d(y,x) \colon y \in E\}$ ; nous souhaitons prouver que $\alpha \leq \varepsilon$. Si ce n'est pas le cas, prenons $\delta > 0$ et choisissons $y \in E$ tel que $d(y,x) < \alpha + \delta$.
Posons $\rho_\varphi(y) = \rho \leq \varepsilon$ ; on vérifie comme ci-dessus que la fonction $g$ suivante appartient à $E(\{\varphi^n(x)\} \cup \{\varphi^m(y)\})$ :
- $\forall n \in \mathbb{Z}\ g(\varphi^n(x)) = \max(\varepsilon, d(y,x) - \frac{\rho}{2})$.
- $\forall m \in \mathbb{Z}\ g(\varphi^m(y)) = \frac{\rho}{2}$.
Puisque les orbites de $\varphi$ sont précompactes, il existe $z \in \mathbb{U}$ qui prend les bonnes distances à $\{\varphi^n(x)\} \cup \{\varphi^m(y)\}$.
Alors $z \in E$, et nécessairement $\rho < 2\delta$.
En faisant tendre $\delta$ vers 0, on voit qu'il y a deux cas à considérer :
(1) Il existe $y \in E$ tel que $d(y,x) = \alpha$ et $0 < \rho(y) \leq \varepsilon$.
Alors, on peut comme précédemment trouver $z$ tel que
- $\forall n \in \mathbb{Z}\ d(z, \varphi^n(x)) = \max(\varepsilon, d(y,x) - \frac{\rho(y)}{2})$.
- $\forall n \in \mathbb{Z}\ d(z, \varphi^n(y)) = \frac{\rho(y)}{2}$.
On voit que $z \in E$, et $d(z,x) < \alpha$, ce qui est absurde.

(2) Pour tout $p \in \mathbb{N}^*$ il existe un point fixe $y_p$ de $\varphi$ tel que $\alpha \leq d(y_p, x) < \alpha + \frac{1}{p}$.
Dans ce cas, prenons $p$ tel que $\frac{1}{p} < \frac{\varepsilon}{2}$, et considérons l'application suivante :
- $g(y_p) = \frac{1}{p}$
- $\forall n \in \mathbb{Z}\ g(\varphi^n(x)) = d(y_p, x) - \frac{1}{p}$.
Une vérification directe montre que $g \in E(\{\varphi^n(x)\} \cup \{y_p\})$, et donc qu'il existe $z \in \mathbb{U}$ tel que $d(z, .) = g$.
Ceci nous permet à nouveau d'obtenir $z \in E$ tel que $d(z,x) < \alpha$. ◊

Nous avons finalement tous les outils pour démontrer le théorème 12.

**Preuve du théorème 12.**
On a vu au chapitre 3 que $\mathbb{U}$ est le seul espace polonais non vide ayant la propriété d'extension approximative.
Par conséquent, pour prouver le théorème 12, il suffit de prouver que $Fix(\varphi)$ a cette propriété. Pour ce faire, commençons par remarquer que le lemme 5.3 entraîne que, pour tout $x \in X$ tel que $\rho_\varphi(x) \leq \varepsilon$, il existe un point fixe $y$ tel que $d(y,x) \leq 2\varepsilon$.
Soient alors $x_1, \ldots, x_n \in Fix(\varphi)$, $f \in E(\{x_1, \ldots, x_n\})$, et $\varepsilon > 0$.
Le lemme 5.2 implique que l'on est dans un (au moins) des deux cas suivants :
- il existe un certain $z$ tel que $\rho_\varphi(z) \leq \frac{\varepsilon}{2}$, et $d(z, x_i) = f(x_i)$ pour tout $i = 1, \ldots, n$, ou
- il existe $z \in Fix(\varphi)$ tel que $|d(z,x_i) - f(x_i)| \leq \varepsilon$ pour tout $i \in [1, m]$.

Dans le second cas, nous avons ce que nous voulions ; supposons donc être dans le premier cas, et prenons un point fixe $y$ tel que $d(y,z) \leq \varepsilon$. Alors $y \in Fix(\varphi)$, et $|d(y,x_i) - f(x_i)| \leq \varepsilon$ pour tout $1 \leq i \leq n$ . ◊

Le défaut du résultat précédent est que l'hypothèse sur les orbites de $\varphi$ paraît "ad hoc" : il n'est pas facile de vérifier qu'une isométrie a toutes ses orbites précompactes, et il n'y a aucun espoir de montrer un théorème qui jouerait le rôle de réciproque au théorème 12.
En fait, les mêmes méthodes que ci-dessus impliquent le résultat suivant :

**Théorème 13.** *Soit $G$ un groupe agissant par isométries sur $\mathbb{U}$ de façon à ce que chaque point de $\mathbb{U}$ ait une orbite précompacte.*
*Alors, s'il est non vide, $Fix(G) = \{x \in \mathbb{U} \colon \forall g \in G\ g.x = x\}$ est isométrique à $\mathbb{U}$.*
*En particulier, si un groupe compact agit continûment par isométries sur $\mathbb{U}$, l'ensemble des points de $\mathbb{U}$ laissés invariants par l'action de $G$ est ou vide ou isométrique à $\mathbb{U}$.*

Pour prouver ce résultat, il suffit de reprendre le raisonnement précédent en remplaçant à chaque étape les orbites pour $\varphi$ par les orbites pour l'action de $G$ ; on a préféré énoncer et démontrer d'abord le théorème 12 (qui correspond au cas où $G = (\mathbb{Z}, +)$) pour ne pas compliquer davantage la compréhension de la preuve.
On peut remarquer qu'aucune hypothèse sur la topologie de $G$ n'est nécessaire : le fait que les orbites sont précompactes est suffisant pour que la preuve fonctionne.
Il paraît envisageable que le résultat précédent caractérise les groupes compacts (autrement dit : est-ce que tout groupe polonais non compact a une action continue par isométries sur $\mathbb{U}$ dont l'ensemble des points fixes n'est ni vide, ni finiment injectif ?), même si cette affirmation n'est guère plus qu'un acte de foi, motivé tout de même par les résultats de la section suivante.

## 5.2 Cas général, et problème de classification des isométries de $\mathbb{U}$ à conjugaison près

Dans cette section, on montre que le résultat du théorème 12 est (en général) faux quand $\varphi$ a des orbites non précompactes. En effet, on établit le résultat suivant :

**Théorème 14.** *Soit $X$ un espace métrique polonais. Alors il existe une isométrie $\varphi \in Iso(\mathbb{U})$ telle que $Fix(\varphi)$ est isométrique à $X$.*

**Remarque.** On pourrait également se demander quels sont les fermés de $\mathbb{U}$ qui sont l'ensemble des points fixes d'une isométrie $\varphi$ ; on sait que, à l'exception de $\mathbb{U}$ lui-même, ils doivent tous être d'intérieur vide.
Le théorème précédent ne nous apporte pas beaucoup plus d'informations sur cette question ; cela illustre assez bien les limites de nos méthodes : en construisant un plongement de $X$ dans $\mathbb{U}$, on ne peut pas garantir autre chose que l'existence *d'une* copie $X' \subset \mathbb{U}$ qui ait les propriétés désirées. Certaines questions sont donc difficilement accessibles par cette méthode.

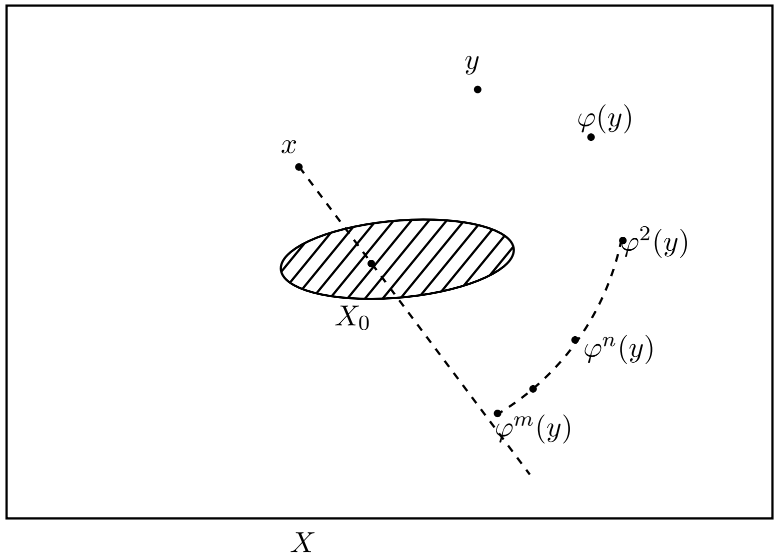
**Preuve du théorème 14.**
Nous pouvons bien sûr supposer que $X \neq \emptyset$ (il n'est pas difficile de construire, par exemple, une isométrie $\varphi$ de $\mathbb{U}$ telle que $d(x, \varphi(x)) \geq 1$ pour tout $x \in \mathbb{U}$ ; Cameron et Vershik ont même prouvé dans [CV] qu'il existe des isométries dont les orbites sont denses).
Avant de démarrer, il faut introduire quelques définitions.
Si $X$ est un espace métrique, on note $E(X, \omega, \mathbb{Q})$ l'ensemble des fonctions $f \in E(X, \omega)$ qui prennent des valeurs rationnelles sur un support fini (cet ensemble est dénombrable si $X$ l'est).

Si $X_0$ et $X$ sont deux espaces métriques dénombrables avec $X_0 \subset X$, et $\varphi$ est une isométrie de $X$, on voudrait trouver une condition sur $(X, X_0, \varphi)$ qui exprime formellement l'idée naïve suivante :
"$\varphi$ fixe tous les points de $X_0$, et pour chaque $x \in X \setminus X_0$, $\varphi^n(x)$ s'éloigne autant de $x$ que possible".
Par la définition suivante, on propose une façon de traduire la phrase ci-dessus en langage mathématique correct :

On dit que $(X, X_0, \varphi)$ a la propriété (*) si :
- $\forall x \in X_0 \ \varphi(x) = x$.
- $\forall x, y \in X \ \liminf_{|p| \to +\infty} d(x, \varphi^p(y)) \geq d(x, X_0) + d(y, X_0)$.

L'intérêt majeur de cette définition est qu'elle se prête bien à une construction inductive, comme le montre le lemme suivant :

**Lemme 5.4.** *Soit $(X, X_0, \varphi)$ ayant la propriété (*).*
*Il existe un espace métrique dénombrable $X'$ et une isométrie $\varphi'$ de $X'$ tels que :*
*- $X$ se plonge isométriquement dans $X'$, et $\varphi'$ prolonge $\varphi$.*
*- $\forall f \in E(X, \omega, \mathbb{Q}) \ \exists x' \in X' \ \forall x \in X \ d(x', x) = f(x)$.*
*- $(X', X_0, \varphi')$ a la propriété (*) (en identifiant $X_0$ à son image via le plongement isométrique de $X$ dans $X'$).*




La propriété $(*)$ : pour $n$ suffisamment grand,
$d(x, \varphi^n(y)) \geq d(y, X_0) + d(x, X_0) - \varepsilon$ .

Admettons ce lemme pour le moment ; choisissons un sous-ensemble dénombrable dense $X_0$ de $X$, et posons $\varphi_0 = id_{X_0}$. Alors $(X_0, X_0, \varphi_0)$ a la propriété (*), et le lemme 5.4 nous permet de définir inductivement des espaces métriques dénombrables $X_i$ et des isométries $\varphi_i \colon X_i \to X_i$ tels que :
-$X_i$ se plonge isométriquement dans $X_{i+1}$, et $\varphi_{i+1}$ prolonge $\varphi_i$ ;
-$(X_i, X_0, \varphi_i)$ a la propriété (*) ;
-$\forall f \in E(X_i, \omega, \mathbb{Q})\ \exists z \in X_{i+1}\ \forall x \in X_i\ d(z, x) = f(x)$.
Soit alors $Y$ le complété de $\cup X_i$, et $\varphi$ le prolongement (par uniforme continuité) à $Y$ de l'application définie par $\varphi(x) = \varphi_i(x)$ pour tout $x \in X_i$.
Les arguments habituels permettent de vérifier que $Y$ a la propriété d'extension approximative ; puisque $Y$ est complet, ceci prouve que $Y$ est isométrique à $\mathbb{U}$.
La construction garantit également que tous les points de $X_0$ sont fixés par $\varphi$, et que

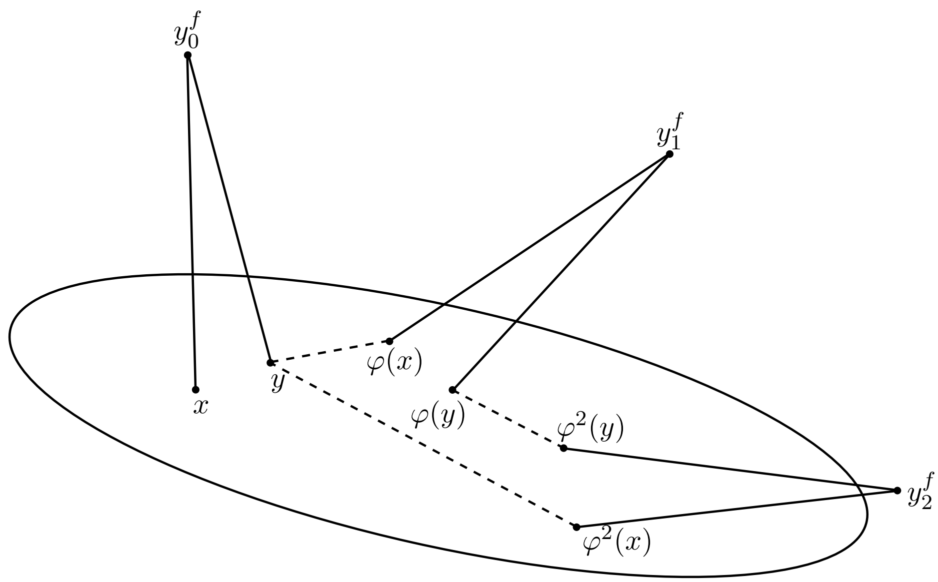
$$\liminf_{|p| \to +\infty} d(y_1, \varphi^p(y_2)) \geq d(y_1, X_0) + d(y_2, X_0)$$

pour tout $(y_1, y_2) \in Y^2$.
Par suite, $Fix(\varphi)$ est égal à l'adhérence de $X_0$ dans $\mathbb{U}$ ; donc il est isométrique au complété de $X_0$, c'est-à-dire à $X$. $\Diamond$

**Preuve du lemme 5.4.**
Pour commencer, prenons $f \in E(X, \omega, \mathbb{Q})$ ; on pose $X^f = X \cup \{y_i^f\}_{i \in \mathbb{Z}}$ (où les $y_i^f$ sont deux à deux distincts) et définissons une distance sur $X^f$, qui étend la distance de $X$, par :

-$d(x, y_i^f) = f(\varphi^{-i}(x))$ ;
-$d(y_i^f, y_j^f) = \inf_{x \in X}(d(y_i^f, x) + d(y_j^f, x))$.

(En d'autre termes, $X^f$ est l'amalgame des espaces $X \cup \{f \circ \varphi^i\}$ au-dessus de $X$. )




Construction de l'espace $X^f$ .

Soit $\varphi_f$ la fonction définie par $\varphi_f(y_i^f) = y_{i+1}^f$ (pour $i \in \mathbb{Z}$), et $\varphi_f(x) = \varphi(x)$ pour $x \in X$.

Par définition de $d$, $\varphi_f$ est une isométrie de $X^f$, qui prolonge $\varphi$.
On veut maintenant montrer que $(X^f, X_0, \varphi_f)$ a la propriété (*).
Pour cela, prenons $y, y' \in X^f$ ; nous souhaitons montrer que

$$\liminf_{|p| \to +\infty} d((\varphi_f)^p(y'), y) \geq d(y, X_0) + d(y', X_0) \ .$$

Si $y$ et $y'$ appartiennent $X$, il n'y a rien à démontrer. Deux cas restent à étudier :

(1) $y \in X$, $y' = y_j^f$. Sans perdre de généralité, on peut supposer que $j = 0$.

Par définition, on a

$$d((\varphi_f)^p(y_0^f), y) = f(\varphi^{-p}(y)) = \min_{i=1,\dots,n} (f(x_i) + d(y, \varphi^p(x_i)))$$

pour des points $x_1, \dots, x_n \in X$ ( rappelons que $f \in E(X, \omega, \mathbb{Q})$).
Soit $\varepsilon > 0$ ; pour $|p|$ suffisamment grand, on sait que
$d(y, \varphi^p(x_i)) \geq d(y, X_0) + d(x_i, X_0) - \varepsilon$ pour tout $i = 1, \dots, n$.
On a alors $d((\varphi_f)^p(y_0^f), y) \geq \min_{i=1,\dots,n}(f(x_i) + d(y, X_0) + d(x_i, X_0) - \varepsilon)$, et donc $d((\varphi_f)^p(y_0^f), y) \geq d(y, X_0) + \min_{i=1,\dots,n}(f(x_i) + d(x_i, X_0)) - \varepsilon$.
Par conséquent $d((\varphi_f)^p(y_0^f), y) \geq d(y, X_0) + d(y_0^f, X_0) - \varepsilon$, et c'est ce que nous voulions démontrer.

(2) $y = y_i^f$ et $y' = y_j^f$ ; on peut supposer que $i = 0$.
On a alors $d(\varphi_f^p(y'), y) = \inf_{x \in X}(f(x) + f(\varphi^{-p-j}(x))$.
Nous voulons donc prouver que

$$\liminf_{|p| \to +\infty} \inf_{x \in X} (f(x) + f(\varphi^{-p}(x)) \geq 2 \inf_{x \in X_0} f(x) \ .$$

Supposons encore $f$ contrôlée par $\{x_1, \dots, x_n\}$, choisissons $\varepsilon > 0$, et prenons $|p|$ suffisamment grand pour que $d(x_i, \varphi^p(x_j)) \geq d(x_i, X_0) + d(x_j, X_0) - \varepsilon$ pour tout $1 \leq i, j \leq n$.
On a alors, pour tout $x \in X$ :
$f(x) + f(\varphi^{-p}(x)) = f(x_i) + d(x, x_i) + f(x_j) + d(x, \varphi^p(x_j))$ pour un certain $(i, j)$.
Puisque $d(x, x_i) + d(x, \varphi^p(x_j)) \geq d(x_i, \varphi^p(x_j))$, on voit qu'il existe un $(i, j)$ tel que $\inf_{x \in X}(f(x) + f(\varphi^{-p}(x)) = f(x_i) + d(x_i, \varphi^p(x_j)) + f(x_j)$.
Puisque $d(x_i, \varphi^p(x_j)) \geq d(x_i, X_0) + d(x_j, X_0) - \varepsilon$, on a

$$\inf_{x \in X}(f(x) + f(\varphi^{-p}(x)) \geq f(x_i) + d(x_i, X_0) + d(x_j, X_0) + f(x_j) - \varepsilon \geq 2 \inf_{x \in X_0} f(x) - \varepsilon.$$

Ceci suffit à démontrer que $(X^f, X_0, \varphi_f)$ a la propriété (*).

Appelons maintenant $X'$ l'amalgame métrique des espaces $X^f$ au-dessus de $X$, où $f$ parcourt $E(X, \omega, \mathbb{Q})$.
Cet espace est dénombrable, et on peut étendre $\varphi$ en une isométrie $\varphi'$ de $X^f$ en posant $\varphi'(x) = \varphi_f(x)$ pour chaque $x \in X^f$.
En utilisant les mêmes arguments que ci-dessus, on montre facilement que $(X', X_0, \varphi')$ a la propriété (*). $\Diamond$

Cette construction a un intérêt supplémentaire, puisqu'elle permet de calculer la complexité de la relation de conjugaison entre éléments de $Iso(\mathbb{QU})$, et d'obtenir un minorant de la complexité de la relation de conjugaison entre éléments de $Iso(\mathbb{U})$.

Commençons par remarquer que $Iso(\mathbb{QU})$ est isomorphe à un sous-groupe fermé de $S_\infty$, par conséquent toute relation induite par une action borélienne de $Iso(\mathbb{QU})$ sur un polonais se réduit à la relation universelle $E^\infty_{S_\infty}$ pour les relations induites par une action borélienne de $S_\infty$.

Ici, il est intéressant de faire une brève parenthèse sur les actions de $S_\infty$, et leur lien avec la logique ; on suit l'exposition de Gao-Kechris [GaKe]. Si $L = \{R_i\}_{i\in I}$ est un langage relationnel dénombrable et non vide (où $I$ est dénombrable et $R_i$ est une relation $n_i$-aire), on pose

$$X_L = \Pi_{i\in I} 2^{\mathbb{N}^{n_i}}.$$

On peut associer à chaque $x \in X_L$ une $L$-structure dénombrable $< \mathbb{N}, R_i >$, d'univers $\mathbb{N}$, définie par $R_i(s) \iff x_i(s) = 1$ (où $s \in \mathbb{N}^{n_i}$).
De cette façon, on peut voir $X_L$ (qui est un espace de Cantor) comme l'espace des $L$-structures infinies dénombrables (d'univers $\mathbb{N}$).
On peut faire agir $S_\infty$ par shift sur les coordonnées, en posant

$$(\sigma.x)_i(k_1, \dots, k_{n_i}) = x_i(\sigma^{-1}(k_1), \dots, \sigma^{-1}(k_{n_i})) \ .$$

Alors, $\sigma.x = y$ signifie simplement que $\sigma$ réalise un isomorphisme de la $L$-structure associée à $x$ sur la $L$-structure associée à $y$.
Par conséquent, $E^{X_L}_{S_\infty}$ est simplement la relation d'isomorphisme $\cong$ entre $L$-structures.
On ne veut pas forcément considérer toutes les $L$-structures, mais simplement celles qui vérifient certains axiomes : par exemple, si $L = \{R\}$, où $R$ est une relation binaire, on peut ne considérer que les $x \in X_L$ tels que la structure associée soit un graphe.
Formellement, on ne considère que les formules contenues dans l'extension $L_{\omega_1\omega}$ de la logique du premier ordre sur $L$ (cf [Ke1] et [Hod]) ; ces formules ont un nombre fini de variables libres.
Alors, si $\sigma \in L_{\omega_1\omega}$, l'ensemble $Mod_\sigma$ formé par les $x \in X_L$ qui sont des modèles de $\sigma$ est borélien, et on note $\cong_\sigma$ la relation d'isomorphisme associée.
On voit que toutes les relations $\cong_\sigma$ sont induites par une action borélienne de $S_\infty$, et on peut obtenir la relation universelle pour les relations induites par une action borélienne de $S_\infty$ de cette façon ; par exemple, l'isomorphisme entre graphes dénombrables entre dans ce cadre, et est universel pour ces relations.

Puisque $\mathbb{QU}$ est un sous-groupe fermé de $S_\infty$, la relation de conjugaison entre éléments de $Iso(\mathbb{QU})$ se réduit boréliennement à la relation d'isomorphisme entre graphes dénombrables. On utilise ici la construction précédente pour prouver que la réciproque est vraie.

Si $G$ est un graphe dénombrable, d'ensemble de sommets $V$, on peut le munir de la distance suivante :

$$\forall v, v' \in V \ d(v,v') = \begin{cases} 1 & \text{si } (v,v') \in G \\ 2 & \text{sinon} \end{cases} .$$

Cette distance fait de $G$ un espace métrique polonais dénombrable ; on voit que deux graphes sont isomorphes si, et seulement si, les espaces métriques correspondants sont isométriques.
Notons $\mathcal{G} = \{F \in 2^{\mathbb{QU}} \colon F$ est isométrique à un graphe muni de cette distance $\}$.
On vérifie facilement que $\mathcal{G}$ est borélien, et la relation d'isométrie entre éléments de $G$ est universelle pour les relations induites par une action borélienne de $S_\infty$.
Supposons que $G, G' \in \mathcal{G}$ soient isométriques, puis appelons $G_\infty = \cup G_i$ et $G'_\infty = \cup G'_i$ les espaces obtenus au cours de la construction précédente et $\varphi_\infty$, $\varphi'_\infty$ les isométries correspondantes.
On vérifie que l'isométrie entre $G$ et $G'$ s'étend en une isométrie $\psi \colon G_\infty \to G'_\infty$ telle que $\psi \circ \varphi_\infty = \varphi'_\infty \circ \psi$.
Puisque $G_\infty$ et $G'_\infty$ ont tous deux la propriété d'extension rationnelle, ils sont isométriques à $\mathbb{QU}$.
En utilisant le fait que $\mathbb{QU}$ a la propriété d'extension rationnelle, on peut donc, en utilisant les mêmes méthodes que dans [GaKe], construire une application borélienne $\Psi \colon \mathcal{G} \to Iso(\mathbb{QU})$ telle que :
- tout $G \in \mathcal{G}$ est isométrique à $Fix(\Psi(G))$,
- Si $G$ et $G'$ sont isométriques, alors $\Psi(G)$ et $\Psi(G')$ sont conjuguées (dans $Iso(\mathbb{QU})$).
(Cette construction, qui est directe mais assez fastidieuse, est détaillée dans l'Appendice).
Réciproquement, supposons qu'il existe une isométrie $\varphi \in Iso(\mathbb{U})$ telle que $\varphi \circ \Psi(G) = \Psi(G') \circ \varphi$ ; ceci entraîne que $\varphi(Fix(\Psi(G))) = Fix(\Psi(G'))$, et donc que $G$ et $G'$ sont isométriques. On vient de démontrer le résultat suivant :

**Théorème 15.** *La relation de conjugaison entre éléments de $Iso(\mathbb{QU})$ est bi-réductible boréliennement à la relation d'isomorphisme entre graphes dénombrables.*

En utilisant le fait que $\mathbb{U}$ est le complété de $\mathbb{QU}$, on peut (puisque le prolongement par continuité induit un morphisme continu entre les groupes d'iso-

métries), utiliser la construction de la preuve du théorème 14 pour construire une application borélienne $\Phi\colon \mathcal{G} \to Iso(\mathbb{U})$ telle que deux graphes $G$ et $G'$ soient isomorphes si, et seulement si, $\Phi(G)$ et $\Phi(G')$ sont conjuguées dans $Iso(\mathbb{U})$.
On a donc le résultat suivant :

**Théorème 16.** *L'isomorphisme entre graphes dénombrables se réduit boréliennement à la relation de conjugaison entre éléments de* $Iso(\mathbb{U})$.

**Remarque.** Il est naturel de conjecturer, comme Gao et Kechris dans [GaKe], que la relation de conjugaison entre éléments de $Iso(\mathbb{U})$ est en fait universelle pour les actions boréliennes de groupe polonais ; mais il ne semble pas que les idées de la construction ci-dessus soient suffisantes pour le démontrer.

# 6. HOMOGÉNÉITÉ DANS L'ESPACE D'URYSOHN

Comme nous l'avons vu dans l'introduction, Urysohn se demande dans [Ur] si l'on peut préciser les propriétés d'homogénéité de $\mathbb{U}$ ; dans ce chapitre, on apporte une réponse à sa question, en démontrant en particulier le résultat suivant :

**Théorème 17.** *Un fermé $F \subset \mathbb{U}$ est compact si, et seulement si, $Iso(\mathbb{U})$ agit transitivement sur l'ensemble des copies isométriques de $F$ contenues dans $\mathbb{U}$.*

$N$ote : Comme expliqué à la fin de l'introduction, j'ai appris après la rédaction de cette thèse que E. Benami a également démontré ce résultat en 2005.

Nous avons déjà vu une implication, qui a été démontrée par Huhunaišvili en 1955 : si $K$ est compact, alors $Iso(\mathbb{U})$ agit transitivement sur l'ensemble de ses copies isométriques contenues dans $\mathbb{U}$. Pour établir la réciproque, on démontre tout d'abord qu'on peut se restreindre au cas où $E(F)$ est séparable, i.e. $F$ a la propriété de colinéarité. Puis on construit, si $X$ est un polonais non compact avec la propriété de colinéarité, une copie isométrique de $X$ contenue dans $\mathbb{U}$ et qui ne peut être envoyée par une isométrie de $\mathbb{U}$ sur la copie obtenue en appliquant la construction de Katětov.

## 6.1 Reformulation du problème

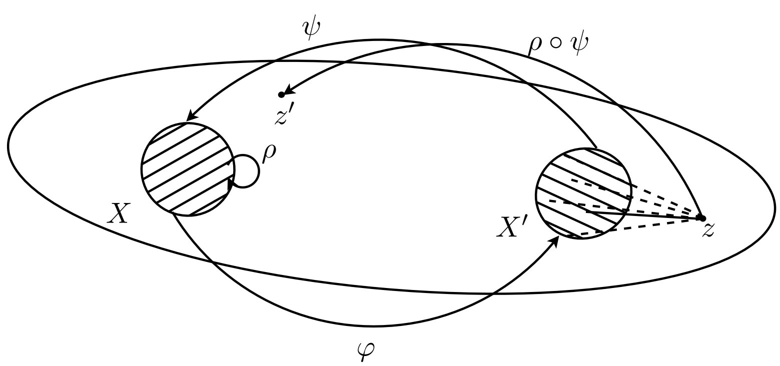
On va en fait démontrer le théorème suivant :

**Théorème 18.** *Soit $X$ un polonais. Les assertions suivantes sont équivalentes :*
*(a) $X$ est compact.*
*(b) Si $X_1, X_2 \subset \mathbb{U}$ sont isométriques à $X$, et $\varphi \colon X_1 \to X_2$ est une isométrie, alors il existe $\tilde{\varphi} \in Iso(\mathbb{U})$ qui étend $\varphi$.*
*(c) Si $X_1, X_2 \subset \mathbb{U}$ sont isométriques à $X$, alors il existe $\varphi \in Iso(\mathbb{U})$ telle que $\varphi(X_1) = X_2$.*
*(d) Si $X_1 \subset \mathbb{U}$ est isométrique à $X$ et $f \in E(X_1)$, alors il existe $z \in \mathbb{U}$ tel que $d(z, x) = f(x)$ pour tout $x \in X_1$.*

On a déjà vu une preuve de $(a) \Rightarrow (b)$ ; $(b) \Rightarrow (c)$ est immédiat.
Pour montrer que $(c) \Rightarrow (d)$, considérons un espace métrique $X$ ayant la propriété (c) et plongé dans $\mathbb{U}$, et $f \in E(X)$.
Remarquons que, puisqu'il existe une copie de $X$ qui est $g$-plongée dans $\mathbb{U}$, et que toutes les copies isométriques de $X$ s'envoient l'une sur l'autre par une isométrie de $\mathbb{U}$, chaque copie isométrique de $X$ est $g$-plongée dans $\mathbb{U}$.
L'espace métrique $X_f = X \cup \{f\}$ (muni de la distance induite par celle de $E(X)$) se plonge isométriquement dans $\mathbb{U}$, par conséquent il en existe une copie isométrique $Y = X' \cup \{z\} \subset \mathbb{U}$ où $X'$ est une copie isométrique de $X$. Appelons alors $\varphi$ l'isométrie de $X$ dans $X'$ qui envoie chaque point $x \in X$ sur sa copie dans $X'$ ; on a par définition $d(z, \varphi(x)) = f(x)$. Prenons maintenant une isométrie $\psi$ de $\mathbb{U}$ qui envoie $X'$ sur $X$ ; alors $d(\psi(z), \psi \circ \varphi(x)) = f(x)$. Par conséquent, si $\rho$ est une isométrie de $\mathbb{U}$ qui étend $(\psi \circ \varphi)^{-1}$ on a, pour tout $x \in X$ :

$$d(\rho(\psi(z)), x) = d(\psi(z), \rho^{-1}(x)) = d(\psi(z), \psi \circ \varphi(x)) = d(z, \varphi(x)) = f(x).$$

Ainsi, $\rho(\psi(z)) = z'$ est tel que $d(z', x) = f(x)$ pour chaque $x \in X$, ce qui montre que $X$ a la propriété $(d)$.




Construction de $z'$

Il ne reste plus qu'à démontrer que $(d) \Rightarrow (a)$ ; cela s'avère être l'étape la plus compliquée de la preuve.
Si $X \subset \mathbb{U}$ est fermé, définissons $\Phi^X : \mathbb{U} \to E(X)$ par $\Phi^X(z)(x) = d(z, x)$.

Alors $\Phi^X$ est 1-lipschitzienne.
La propriété $(d)$ du théorème 18 est équivalente à la surjectivité de $\Phi^{X_1}$ pour chaque copie isométrique $X_1 \subset \mathbb{U}$ de $X$ ; mais $\Phi^{X_1}(\mathbb{U})$ est nécessairement séparable puisque $\mathbb{U}$ l'est. On voit donc qu'il est nécessaire que $E(X)$ soit séparable pour que $X$ ait la propriété (d).
On a étudié au chapitre 1 la question de la séparabilité de $E(X)$ ; les résultats de ce chapitre entraînent que, si $X$ est un polonais qui n'a pas la propriété de colinéarité, alors $X$ n'a pas la propriété (d).

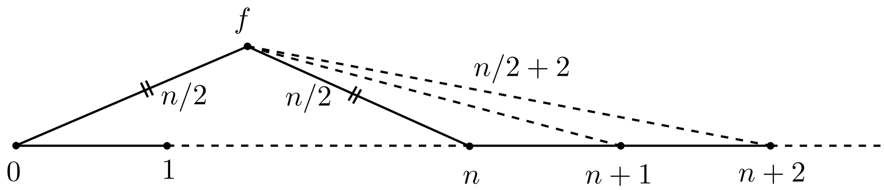
## 6.2 Plongements dans $\mathbb{U}$ des espaces ayant la propriété de colinéarité

Nous sommes maintenant prêts à achever la preuve du théorème 18 ; il nous reste à étudier le cas des espaces polonais ayant la propriété de colinéarité.
Étant donné un tel espace $X$, nous souhaitons construire, si $X$ n'est pas compact, une copie isométrique $X' \subset \mathbb{U}$ de $X$ telle que $\Phi^{X'}(\mathbb{U}) \neq E(X')$.
Il est alors naturel de chercher à construire une copie $X' \subset \mathbb{U}$ de $X$ telle que $\Phi^{X'}(\mathbb{U})$ soit aussi petit que possible.
Pour cela, il nous faut encore une définition :
Si $X$ est un espace métrique et $\varepsilon > 0$, disons que $f \in E(X)$ est *$\varepsilon$-saturée* s'il existe un compact $K \subset X$ tel que, pour tout $g \in E(X)$, $g_{|K} = f_{|K} \Rightarrow d(f,g) \leq \varepsilon$.
Pour simplifier l'écriture dans la suite, convenons qu'un tel compact $K$ *témoigne* du fait que $f$ est $\varepsilon$-saturée.
On dit alors que $f$ est *saturée* si elle est $\varepsilon$-saturée pour tout $\varepsilon > 0$.

Géométriquement, on voit que les applications saturées sur un polonais $X$ sont nécessairement contenues dans $\overline{\Phi^X(\mathbb{U})}$ pour tout plongement de $X$ dans $\mathbb{U}$ (cela se vérifie facilement).

Un exemple simple d'application saturée est donné par toute application de la forme $z \mapsto d(x,z)$, où $x \in X$ (pour tout $\varepsilon > 0$ on peut prendre $K = \{x\}$).
L'exemple suivant est plus intéressant : soit $X = \mathbb{N}$, et $f \in E(\mathbb{N})$ telle que $f(0) = f(1) = 1/2$.
Alors l'inégalité triangulaire implique que $f(n+2) = n+3/2$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, ce qui prouve que $f$ est saturée.

Remarquons que, si $X$ est un polonais non compact, on construit facilement des fonctions $f \in E(X)$ qui ne sont pas saturées.




Un exemple de fonction saturée sur $\mathbb{N}$ :
$f(n)$ et $f(0)$ suffisent à déterminer $f(m)$ pour tout $m \geq n$.

Le théorème ci-dessous suffit donc à achever la preuve du théorème 18 :

**Théorème 19.** *Soit $X$ un espace avec la propriété de colinéarité. Il existe une copie isométrique $X' \subset \mathbb{U}$ de $X$ telle que pour tout $z \in \mathbb{U}$ l'application $x' \mapsto d(z, x')$, vue comme un élément de $E(X')$, soit saturée.*

On utilise dans la preuve du théorème 19 quelques propriétés simples des applications $\epsilon$-saturées sur les espaces ayant la propriété de colinéarité, qui sont regroupées dans le lemme technique suivant dans l'espoir de clarifier la preuve du théorème 19 :

**Lemme 6.1.** *Soit $X$ un espace polonais ayant la propriété de colinéarité.*

*(1) Si $\varepsilon > 0$ et $f \in E(X)$ n'est pas $\varepsilon$-saturée, alors il existe pour tout compact $K \subset X$ une fonction $g \in E(X)$ telle que $g_{|K} = f_{|K}$ et $g(x) < f(x) - \varepsilon$ pour un certain $x \in X$.*
*(2) Si $f \in E(X)$ est saturée, alors pour tout $\varepsilon > 0$ il existe un compact $K \subset X$ tel que*

$$\exists M \, \forall x \in X \ d(x, K) \geq M \Rightarrow \exists z \in K \ f(z) + f(x) \leq d(z, x) + \varepsilon.$$

*(3) Soit $(f_n) \in E(X)^{\mathbb{N}}$ une suite de fonctions $\varepsilon_n$-saturées telles que :*
*- Pour tout $n$ il existe un compact $K_n$ qui témoigne du fait que $f_n$ est $2\varepsilon_n$-saturée, et tel que $m \geq n \Rightarrow f_{m|_{K_n}} = f_{n|_{K_n}}$.*
*- $\varepsilon_n \to 0$.*
*- $\cup K_n = X$*
*Alors $f_n$ converge uniformément vers une fonction de Katětov saturée $f$.*

**Preuve du lemme 6.1**.

(1) D'après la remarque qui suit la preuve du théorème 2, il existe un compact $L$ tel que $d(k(f_{|L}), f) \leq \frac{\varepsilon}{2}$ ; on peut supposer que $K \supseteq L$.

Puisque $f$ n'est pas $\varepsilon$-saturée, il existe $g \in E(X)$ telle que $g_{|K} = f_{|K}$ et $d(g,f) > \varepsilon$.
Il existe donc un point $x$ tel que $|f(x) - g(x)| > \varepsilon$.
Par définition d'une extension de Katětov, on sait que
$g \leq k(f_{|K}) \leq k(f_{|L}) \leq f + \frac{\varepsilon}{2}$, et donc $|f(x) - g(x)| > \varepsilon$ n'est possible que si $f(x) - g(x) > \varepsilon$, autrement dit $g(x) < f(x) - \varepsilon$.

(2) Soient $f$, $\varepsilon > 0$ comme dans l'énoncé, et $K$ un compact témoignant du fait que $f$ est $\frac{\varepsilon}{2}$-saturée.
Choisissons $x$ tel que $d(x,K) \geq M = 2\max\{f(x) \colon x \in K\} + \varepsilon$.
Supposons par l'absurde qu'on a $f(x) + f(z) > d(z,x) + \varepsilon$ pour tout $z \in K$, et définissons une fonction $g$ sur $K \cup \{x\}$ par $g_{|K} = f_{|K}$ et $g(x) = f(x) - \varepsilon$.
Alors on a, pour tout $z \in K$ :
$|g(x) - g(z)| = |f(x) - f(z) - \varepsilon| = f(x) - f(z) - \varepsilon \leq f(x) - f(z) \leq d(x,z)$.
De plus, pour tout $z \in K$ on a $g(x) + g(z) = f(x) + f(z) - \varepsilon > d(z,x)$.
Il est également clair que $|g(z_1) - g(z_2)| = |f(z_1) - f(z_2)| \leq d(z_1,z_2)$, et $d(z_1,z_2) \leq f(z_1) + f(z_2) = g(z_1) + g(z_2)$ pour tous $z_1, z_2 \in K$.
Par conséquent, $g$ est une fonction de Katětov, et son extension de Katětov $k(g)$ à $X_p$ est telle que $k(g)_{|K} = f_{|K}$ and $d(f, k(g)) \geq \varepsilon$, ce qui contredit la définition de $K$.

(3) Soient $X$, $f_n$, $\varepsilon_n$ et $K_n$ comme dans l'énoncé du lemme.
La suite $(f_n)$ converge point par point vers une fonction de Katětov $f$ ; nous souhaitons montrer que la convergence est uniforme et (surtout !) que $f$ est saturée.
Pour cela, fixons $\varepsilon > 0$ et choisissons $N$ tel que $4\varepsilon_N \leq \varepsilon$.
Alors on sait, pour tout $n \geq N$, que $f_{n|_{K_N}} = f_{N|_{K_N}}$, ce qui entraîne par définition de $K_N$ que $d(f_n, f_N) \leq 2\varepsilon_N$.
On obtient alors $d(f_n, f_m) \leq \varepsilon$ pour tout $n, m \geq N$, ce qui montre que $(f_n)$ est de Cauchy, donc la convergence est uniforme.
Pour prouver que $f$ est saturée, fixons de nouveau $\varepsilon > 0$ et trouvons $n$ tel que $2\varepsilon_n \leq \frac{\varepsilon}{2}$ et $d(f_n, f) \leq \frac{\varepsilon}{2}$.
Alors toute fonction de Katětov $g$ telle que $g_{|K_n} = f_{|K_n} = f_{n|_{K_n}}$ doit vérifier $d(f,g) \leq d(f,f_n) + d(f_n,g) \leq \varepsilon$ . $\Diamond$

**Preuve du théorème 19.**
On utilise de nouveau une preuve inductive : après avoir posé $X_0 = X$, on construit par récurrence des espaces métriques $X_i$ tels que $X_{i+1} \supseteq X_i$, $\cup X_i$ soit finiment injectif, et $\cup X_i$ ait la propriété recherchée ; alors son complété est isométrique à $\mathbb{U}$, et vérifie l'énoncé du théorème.

Pour simplifier les définitions ci-dessous, notons, si $Y \subset X$ sont deux espaces métriques, $E(X, Y, \omega)$ l'ensemble des fonctions $f \in E(X)$ ayant un support contenu dans $Y \cup F$, où $F \subset X$ est fini.
Par exemple, $E(X, X, \omega) = E(X)$, et $E(X, \emptyset, \omega) = E(X, \omega)$. L'intérêt est que, si $E(Y)$ est séparable, alors $E(X, Y, \omega)$ est encore séparable.
Posons maintenant $X_0 = X$, et définissons

$$X_{i+1} = \{f \in E(X_i, X_0, \omega) \colon f_{|X_0} \text{ est saturée } \} \ .$$

(Ceci a un sens puisque, comme dans les preuves précédentes, on peut supposer, en utilisant l'application de Kuratowski, que $X_i \subset X_{i+1}$).
Notons $Y$ le complété de $\cup X_i$ ; $Y$ est séparable, et il nous suffit de prouver que $Y$ est finiment injectif pour terminer la preuve.
Pour cela, il suffit de prouver que $\cup X_i$ est finiment injectif :
Soient $\{x_1, \ldots, x_n\} \subset X_p$ (pour un $p \geq 0$) et $f \in E(\{x_1, \ldots, x_n\})$.

Posons $Z = X_0 \cup \{x_1, \ldots, x_n\}$ ; on va construire une fonction $g \in E(Z)$ prenant les bonnes valeurs en $x_1, \ldots, x_n$ et dont la restriction à $X_0$ est saturée : une telle fonction correspond à un point de $X_{p+1}$ ayant les bonnes distances à $x_1, \ldots, x_n$.
Pour obtenir $g$, on utilise le lemme suivant :

**Lemme 6.2.** *Soit $f' \in E(Z)$ et $\varepsilon > 0$ tels que $f'(x_i) = f(x_i)$ pour tout $i$, et $f'_{|X_0}$ ne soit pas $\varepsilon$-saturée.*
*Alors, pour tout compact $K_0 \subset X_0$, il existe $g \in E(Z)$ telle que*

$$\forall i = 1, \ldots, n \ g(x_i) = f(x_i), \ g_{|K_0} = f'_{|K_0} \ \text{et} \ \exists x \in X_0 \backslash K_0 \ g(x) \leq f'(x) - \frac{\varepsilon}{2}. \qquad (*)$$

**Preuve du lemme 6.2**
Pour simplifier la notation, fixons un point $z_0 \in K_0$.
Puisque $f'_{|X_0}$ n'est pas $\varepsilon$-saturée, on peut trouver $y_1 \in X_0 \setminus K_0$ tel que $f'(y_1) + f'(z) > d(y_1, z) + \varepsilon$ pour chaque $z \in K_0$.
En posant $K_1 = B(z_0, 2d(z, y_1))$ on peut faire le même raisonnement pour obtenir un point $y_2$, et ainsi de suite. En itérant ce processus, on peut construire une suite $(y_i)$ d'éléments de $X_0$ telle que $d(y_i, z_0) \to +\infty$, une suite croissante de compacts $(K_i)$ de $X_0$ telle que $\cup K_i = X_0$, $y_i \in K_i$ et

$$\forall i \geq 1 \ \forall z \in K_{i-1} \ f'(y_i) + f'(z) > d(y_i, z) + \varepsilon \ .$$

**Fait.** Si on ne peut pas trouver de fonction $g$ comme dans $(*)$, alors il existe $I$ tel que

$$\forall i \geq I \ \exists k_i \ f'(y_i) + f(x_{k_i}) < d(x_{k_i}, y_i) + \frac{\varepsilon}{2} \ . \qquad (**)$$

**Preuve.**
On raisonne par l'absurde.
Choisissons $I$ tel que $d(y_I, z_0) \geq \max\{f'(z)\colon z \in K_0\} + \frac{\varepsilon}{2}$, $f'(y_i) \geq f'(z)$ pour tout $z \in K_0$ et tout $i \geq I$, $K_I \supseteq B(z_0, 2\text{diam}(K_0)]$, et prenons $i \geq I$ tel que $f'(y_i) + f'(x_k) \geq d(x_k, y_i) + \frac{\varepsilon}{2}$ pour chaque $k = 1, \ldots, n$.
Considérons l'application $g$ définie sur $\{x_k\}_{k=1,\ldots,n} \cup K_0 \cup \{y_i\}$ par $g(y_i) = f'(y_i) - \frac{\varepsilon}{2}$, $g(x) = f'(x)$ ailleurs.
Par le choix de $i$, et puisque $f'(y_i) + f'(z) \geq d(y, z) + \frac{\varepsilon}{2}$ pour tout $z \in K_0 \cap X_0$, on voit que $g$ est une fonction de Katětov, et son extension de Katětov $k(g)$ à $Z$ vérifie $k(g)(x_i) = f(x_i)$, $k(g)_{|K_0} = f'_{|K_0}$ et $k(g)(y_i) \leq f'(y_i) - \frac{\varepsilon}{2}$.
Ceci conclut la preuve du Fait.

Quitte à extraire, on peut supposer que $k_i = k$ pour tout $i \geq I$.
Par définition de $X_p$, la restriction à $X_0$ de l'application $d(x_k, .)$ est saturée, donc le lemme 6.1 permet d'affirmer qu'il existe $J$ tel que

$$\forall j > J\ \exists z \in K_J \cap X_0 \quad d(x_k, z) + d(x_k, y_j) \leq d(z, y_j) + \frac{\varepsilon}{4}\ .$$

En combinant ceci avec $(**)$, on obtient, pour tout $j > \max(I, J)$, qu'il existe $z \in K_J \subset K_{j-1}$ tel que $f'(y_j) + f(x_k) + d(x_k, z) \leq d(z, y_j) + \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{4}$.
Ceci entraîne que $f'(y_j) + f'(z) < d(z, y_j) + \varepsilon$, et contredit la définition de la suite $(y_i)$. $\Diamond$

On peut maintenant passer à la dernière étape de la preuve du théorème 19 :
Rappelons qu'on a $\{x_1, \ldots, x_n\} \subset X_p$ $(p \geq 0)$ et $f \in E(\{x_1, \ldots, x_n\})$, $Z = X_0 \cup \{x_1, \ldots, x_n\}$ et on souhaite obtenir $g \in E(Z)$ telle que $g(x_i) = f(x_i)$ pour tout $i$, et $g_{|X_0}$ soit saturée.
Posons $\varepsilon_0 = \inf\{\varepsilon > 0\colon k(f)_{|X_0}$ est $\varepsilon -$ saturée$\}$ ; il nous faut étudier le cas où $\varepsilon_0 > 0$ .
Soit $L_0$ un compact témoignant du fait que $k(f)_{|X_0}$ est $2\varepsilon_0$-saturée, et $z_0 \in L_0$ ; il existe $f_1 \in E(Z)$ telle que $f_{1|L_0} = k(f)_{|L_0}$, $f_1(x_i) = f(x_i)$ pour $i = 1, \ldots, n$ et $z_1 \in X_0 \setminus L_0$ tel que $f_1(z_1) \leq \min\{k(f)(z) + d(z, z_1)\colon z \in L_0\} - \frac{\varepsilon_0}{2}$.
Posons maintenant $\varepsilon_1 = \inf\{\varepsilon > 0\colon f_{1|X_0}$ est $\varepsilon -$ saturée $\}$ :
si $\varepsilon_1 = 0$ la preuve est finie ; si ce n'est pas le cas, on peut encore choisir un compact $L_1 \supseteq B(z_0, \text{diam}(L_0) + d(z_0, z_1))$ témoignant du fait que $f_{1|X_0}$ est $2\varepsilon_1$-saturée .
On obtient ainsi $z_2 \notin L_1$ et $f_2 \in E(Z)$ tels que $f_2(x_i) = f(x_i)$ pour $i = 1, \ldots, n$, $f_{2|L_1} = f_{1|L_1}$ et $f_2(z_2) \leq \min\{f_1(z) + d(z, z_2)\colon z \in L_1\} - \frac{\varepsilon_1}{2}$.
On peut itérer cette construction, ce qui nous permet de construire une suite (finie ou infinie) de fonctions $(f_m) \in E(Z)$ qui a (entre autres) pour propriété

que $f_m(x_i) = f(x_i)$ pour tout $m$ et $i = 1, \ldots, n$ ; la construction s'achève en temps fini si, et seulement si, $f_{m|X_0}$ est saturée, auquel cas nous avons gagné.

Nous pouvons donc restreindre notre attention au cas où la suite est infinie : alors notre construction produit des fonctions de Katětov $f_m$ dont la restriction à $X_0$ est $\varepsilon_m$- saturée, une suite croissante et exhaustive de compacts $(L_m)$ de $X_0$ témoignant du fait que $(f_m)_{|X_0}$ est $2\varepsilon_m$-saturée, et des points $z_m \in (L_m \setminus L_{m-1})$ tels que

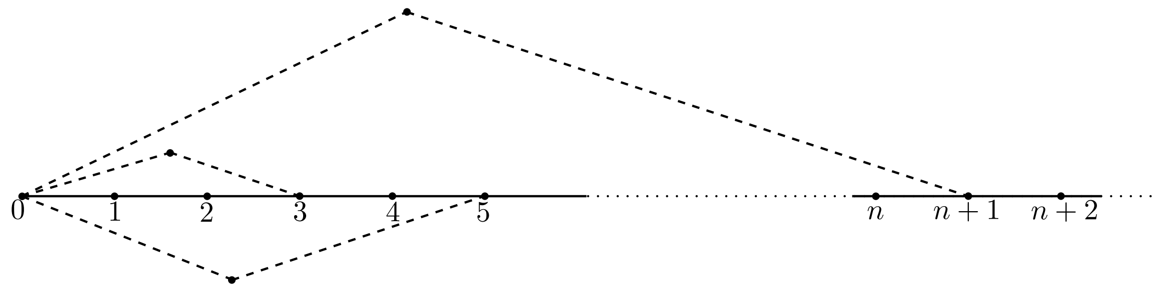
$$f_m(z_m) \leq \min\{f_{m-1}(z) + d(z, z_m) \colon z \in L_{m-1} \cap X_0\} - \frac{\varepsilon_{m-1}}{2} \ .$$

Si 0 est un point d'accumulation de $(\varepsilon_m)$, on peut, quitte à extraire, appliquer le lemme 6.1(3) et ainsi obtenir une fonction $h \in E(Z)$ telle que $h(x_i) = f(x_i)$ pour tout $i = 1, \ldots, n$ et $h_{|X_0}$ est saturée.
Il ne reste donc qu'à étudier le cas où il existe $\alpha > 0$ tel que $\varepsilon_n \geq 2\alpha$ pour tout $n$ ; on démontre par l'absurde que cela ne peut pas arriver.
Puisque la suite $(L_m)$ est exhaustive, $(f_n)$ converge point par point vers $h \in E(Z)$ telle que $h(z_m) = f_m(z_m)$ pour tout $m$.
Quitte à extraire, on peut supposer, puisque $X$ a la propriété de colinéarité, que pour tout $m$ on a $d(z_0, z_m) + d(z_m, z_{m+1}) \leq d(z_0, z_{m+1}) + \frac{\alpha}{2}$.
On sait également que $h(z_{m+1}) \leq h(z_m) + d(z_m, z_{m+1}) - \alpha$.
Ces deux inégalités combinées impliquent que $h(z_{m+1}) - d(z_{m+1}, z_0) \leq h(z_m) - d(z_m, z_0) - \frac{\alpha}{2}$.
Ceci est absurde, puisque si c'était vrai la suite $(h(z_m) - d(z_m, z_0))$ serait non bornée, alors qu'on a nécessairement $h(z_m) - d(z_m, z_0) \geq -h(z_0)$.
Ceci suffit à conclure la preuve du théorème 19. $\Diamond$

**Remarque :** Si l'on applique la construction précédente à $X_0 = (\mathbb{N}, |.|)$, on obtient un ensemble dénombrable $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subset \mathbb{U}$ tel que $d(x_n, x_m) = |n - m|$ pour tout $(n, m)$ et

$$\forall z \in \mathbb{U}\, \forall \varepsilon > 0\, \exists n, m \in \mathbb{N}\ d(x_n, z) + d(z, x_m) \leq |n - m| + \varepsilon.$$

En particulier, $\{x_n\}$ est une copie isométrique de $\mathbb{N}$ qui n'est contenue dans aucune copie isométrique de $\mathbb{R}$.
En rapport avec ce qu'on a vu précédemment concernant les points fixes des isométries, on peut se demander s'il existe une isométrie $\varphi \in Iso(\mathbb{U})$ dont l'ensemble des points fixes soit exactement la copie de $\mathbb{N}$ construite ci-dessus.




L'espace d'Urysohn, "vu depuis" la copie de $\mathbb{N}$ construite dans la preuve du théorème 19 .

# 7. CLASSIFICATION ISOMÉTRIQUE DES ESPACES DE BANACH SÉPARABLES

On a mentionné à plusieurs reprises dans cette thèse le calcul, par Gao et Kechris, de la complexité de la relation d'isométrie entre espace polonais.
A la fin de [GaKe], on peut trouver une liste de problèmes ouverts, parmi lesquels figure le calcul de la complexité de la relation d'isométrie entre espaces de Banach séparables.
Dans ce chapitre, on va utiliser des méthodes similaires à celles de [GaKe], ainsi que des résultats de Mayer-Wolf [Ma] et Holmes [Hol], pour démontrer que la relation d'isométrie linéaire entre espaces de Banach séparables réduit la relation d'isométrie entre polonais.
La réciproque est une conséquence directe du théorème de Banach-Mazur selon lequel toute isométrie entre espaces de Banach est nécessairement affine.

## *7.1 Plongements de $\mathbb{U}$ dans des espaces de Banach*

Dans [Hol], Randall Holmes a étudié les plongements isométriques de $\mathbb{U}$ dans des espaces de Banach (prolongeant ainsi les travaux de Sierpinski dans [Si]).
Avant d'exposer ses résultats, on a besoin de rappeler une définition : si $(X, d, e)$ est un espace métrique pointé, on définit $Lip_0(X, d, e)$ comme l'espace des fonctions lipschitziennes sur $X$, telles que $f(e) = 0$.

On définit une norme sur $Lip_0(X, d, e)$ par la formule

$$||f|| = \inf\{k \in \mathbb{R}\colon f \text{ est } k-\text{lipschitzienne }\}$$

Remarquons que, si l'on choisit un autre point-base $e'$ ; alors $Lip_0(X, d, e)$ et $Lip_0(X, d, e')$ sont isométriques, via l'application $f \mapsto f - f(e')$. Dans la suite, quand il n'y a pas de confusion possible, on ne mentionnera pas $d$, $e$ et on écrira simplement $Lip_0(X)$.
Comme dans [We], on désigne par $[Lip_0(X)]_1$ la boule unité (fermée) de $Lip_0(X)$.

En utilisant l'injectivité finie de $\mathbb{U}$, et en étudiant les plongements isométriques de $\mathbb{U}$ dans $\mathcal{C}([0,1])$, Holmes est parvenu au résultat suivant, qui sera utilisé sans démonstration (la preuve est trop longue pour l'exposer ici ; le lecteur intéressé la trouvera dans [Hol]).

**Théorème (H).** *(Holmes)*
*Si $\mathbb{U}$ est plongé isométriquement dans un Banach $B$, et $0 \in \mathbb{U}$, alors on a, pour tous $x_1, \ldots, x_n \in \mathbb{U}$ et tous $\lambda_1, \ldots, \lambda_n \in \mathbb{R}$ :*

$$||\sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i|| = \sup\left\{\left|\sum_{i=1}^{n} \lambda_i f(x_i)\right| : f \in \left[Lip_0(\{x_1, \ldots, x_n\} \cup \{0\})\right]_1\right\} .$$

Une conséquence de ce théorème est que, dès que $\mathbb{U}$ est plongé isométriquement dans un Banach $B$ et $0 \in \mathbb{U}$, les points de $\mathbb{U}$ différents de 0 forment une famille libre.
En effet, soit $\sum \lambda_i x_i$ une combinaison linéaire finie d'éléments non nuls de $\mathbb{U}$ deux à deux distincts.
On peut trouver $\varepsilon > 0$ tel que $2\varepsilon < \min\{d(x_i, x_j) : i \neq j\}$.
Alors, on peut définir un élément $f$ de $[Lip_0(\{x_1, \ldots, x_n\} \cup \{0\})]_1$ par

$$f(0) = 0,\ f(x_i) = \frac{\varepsilon \lambda_i}{|\lambda_i|} .$$

On a alors $\sum \lambda_i f(x_i) \geq \varepsilon \sum |\lambda_i|$, ce qui montre que $||\sum \lambda_i x_i|| \neq 0$ dès qu'un des $\lambda_i$ est non nul.

Le théorème **(H)** a une conséquence remarquable :

**Corollaire.** *Supposons que $0 \in X \subset B$, $0 \in X' \subset B'$, où $B, B'$ sont des Banach, $X, X'$ sont isométriques à $\mathbb{U}$, et $B$ (resp $B'$) est l'enveloppe linéaire fermée de $X$ (resp. $X'$).*
*Alors toute isométrie de $X$ sur $X'$ s'étend en une isométrie affine de $B$.*

**Preuve.** Pour le voir, remarquons que, si $\varphi : X \to X'$ est une isométrie telle que $\varphi(0) = 0$, alors la formule dans le théorème **(H)** montre que $\varphi$ s'étend en une isométrie linéaire $\Phi : B \to B'$ définie par $\Phi(\sum \lambda_i x_i) = \sum \lambda_i \varphi(x_i)$ (et en prolongeant par uniforme continuité).
Si jamais $\varphi(0) = x' \neq 0$, alors $\varphi - x'$ est une isométrie de $X$ sur $X' - x'$, et $X$, $X' - x'$ sont deux copies isométriques de $\mathbb{U}$, qui contiennent 0, et engendrent respectivement $B, B'$.
Par conséquent, $\varphi - x'$ s'étend en une isométrie linéaire de $B$ sur $B'$, ce qui revient à dire que $\varphi$ s'étend en une isométrie affine de $B$ sur $B'$. $\lozenge$

En particulier, il n'existe, à isométrie (linéaire, si on veut) près, qu'un seul espace de Banach engendré par $\mathbb{U}$ ; dans la suite, on désigne cet espace par $< \mathbb{U} >$. Il est alors naturel de s'attendre à ce que $< \mathbb{U} >$ joue pour la classification des espaces de Banach un rôle analogue à celui que $\mathbb{U}$ joue pour la classification des espaces polonais. C'est l'idée que l'on va développer dans la suite de ce chapitre.

Pour l'instant, on peut déjà remarquer qu'un résultat de Godefroy-Kalton permet d'apporter une réponse à une question posée dans [Hol] (qui est aussi la question n°997 de [We]). Après avoir remarqué que tout Banach séparable se plonge isométriquement dans $< \mathbb{U} >$ (puisque, comme tout polonais, il se plonge dans $\mathbb{U}$ !), Holmes pose la question suivante :
Est-ce que tout Banach séparable se plonge *linéairement* isométriquement dans $< \mathbb{U} >$ ?

Or, dans [GoKa], Godefroy et Kalton ont prouvé que, si $B, B'$ sont deux Banach séparables tels que $B$ se plonge isométriquement dans $B'$, alors $B$ se plonge linéairement isométriquement dans $B'$. On voit donc que tout Banach séparable est linéairement isométrique à un sous-espace fermé de $< \mathbb{U} >$.
La question posée plus haut admet donc une réponse positive ; il est d'ailleurs intéressant de noter que la construction de Godefroy et Kalton est basée sur la théorie des *espaces Lipschitz-libres* (qui sont définis dans la prochaine section), et que ces espaces sont également utiles pour le calcul de la complexité de la relation d'isométrie entre Banach séparables, pour des raisons tout à fait différentes. On explicite dans la section suivante le lien entre $< \mathbb{U} >$ et les espaces Lipschitz-libres, mais il y a certainement plus à dire à ce sujet.

**Remarque.** On vérifie (cf [Ke1]) que $\mathcal{B} = \{F \in \mathcal{F}(< \mathbb{U} >) \colon F \text{ est un sous-ev } \}$ est borélien ; on considère $\mathcal{B}$ comme l'ensemble des espaces de Banach séparables. Pour nos constructions, il est intéressant de remarquer (cf. l'Appendice) que l'application qui à $F \in \mathcal{F}(\mathbb{U})$ associe l'enveloppe linéaire fermée de $F$ dans $\mathcal{F}(< \mathbb{U} >)$ est borélienne (quand $\mathcal{F}(\mathbb{U})$ et $\mathcal{F}(< \mathbb{U} >)$ sont munis de la structure borélienne d'Effros).

## 7.2 Espaces libres

Dans cette section, on présente, de façon très succincte, les définitions et résultats sur les espaces Lipschitz-libres qui sont utiles ici ; on suit le chapitre 2 de [We]. Le lecteur intéressé par cette théorie est invité à consulter [We] ainsi que [GoKa].

Si $(X,d)$ est un espace métrique, on dit que $m\colon X \to \mathbb{R}$ est une *molécule* si $m$ est nulle en dehors d'un ensemble fini, et $\sum_{x\in X} m(x) = 0$.
Pour $p,q \in X$, on définit la molécule $m_{pq}$ par la formule $m_{pq} = \chi_{\{p\}} - \chi_{\{q\}}$, où $\chi_X$ désigne la fonction caractéristique de l'ensemble $X$.
Remarquons que toute molécule s'écrit (éventuellement de plusieurs façons différentes) comme une combinaison linéaire de $m_{pq}$.
On définit maintenant, pour toute molécule $m$,

$$||m|| = \inf\{\sum_{i=1}^{n} |a_i| d(p_i,q_i)\colon m = \sum_{i=1}^{n} a_i m_{p_i q_i}\} \ .$$

Par définition, $||.||$ est une semi-norme sur l'espace des molécules ; on appelle *espace libre sur* $X$, et on note $F(X)$, le complété de l'espace des molécules modulo les vecteurs nuls (on va voir qu'en réalité il n'y a pas de vecteurs nuls).

Le résultat fondamental de la théorie des espaces libres est le suivant :
Pour tout espace métrique $X$, $F(X)^*$ est isométrique à $Lip_0(X)$.

L'isométrie naturelle $T\colon F(X)^* \to Lip_0(X)$ est donnée par la formule :

$$\forall \phi \in F(X)^* \ \forall x \in X \ \ (T\phi)(x) = \phi(m_{xe}).$$

(Rappelons que, si $e \neq e' \in X$, alors $Lip_0(X,d,e)$ et $Lip_0(X,d,e')$ sont isométriques).
L'inverse $S$ de $T$ est défini par la formule

$$(Sf)(m) = \sum_{x\in X} f(x)m(x) \ .$$

Cette identification de $F(X)^*$ à $Lip_0(X)$, associée au théorème de Hahn-Banach, montre que, pour toute molécule $m$, on a

$$||m|| = \sup\{\sum_{x\in X} f(x)m(x)\colon f \in [Lip_0(X)]_1\} \ .$$

Ceci permet de prouver que $||.||$ est en fait une norme sur l'espace des molécules (c'est la même démonstration que celle de l'indépendance des éléments non nuls de $\mathbb{U}$), et que $||m_{xy}|| = d(x,y)$ pour tout $x,y \in X$.
Par conséquent, si $e$ est un point quelconque de $X$, l'application $x \mapsto m_{xe}$ est un plongement isométrique de $X$ dans $F(X)$, telle que l'enveloppe linéaire fermée de l'image de $X$ est égale à $F(X)$ tout entier.
Cette identification, associée à la formule permettant de calculer $||\sum a_i x_i||$ quand les $x_i$ sont des éléments de $\mathbb{U}$ (plongé dans $< \mathbb{U} >$ et contenant 0), permet de préciser le lien entre $< \mathbb{U} >$ et la théorie des espaces libres.

**Théorème.** *(Holmes) Supposons que* $\mathbb{U}$ *soit plongé dans un Banach* $B$*, et contienne* $0$*.*
*Alors, pour tout* $P \subset \mathbb{U}$ *qui contient* $0$*, l'enveloppe linéaire fermée de* $P$ *(dans* $B$*) est isométrique à l'espace libre sur* $P$*.*

En particulier, $< \mathbb{U} >$ n'est autre que l'espace libre sur $\mathbb{U}$.

**Remarque :** Tout ceci permet de considérer l'opération qui à un polonais $X$ associe l'espace libre sur $X$ comme une application borélienne entre boréliens standards ; c'est une façon d'obtenir l'uniformité qui est nécessaire pour la preuve de la section 7.3.

Dès que deux espaces sont dilatés l'un de l'autre, il est facile de voir que les espaces libres engendrés sont isométriques ; la réciproque est fausse en général, mais vraie dans suffisamment de cas particuliers pour être très utile ici.

Suivons Weaver et disons qu'un polonais $P$ est concave si, pour tous $p \neq q \in P$, la molécule $\frac{m_{pq}}{d(p,q)}$ est un point extrémal dans la boule unité de $F(X)^{**}$ (pour le plongement canonique de $F(X)$ dans son bidual).
L'intérêt, pour nous, de cette définition, provient du résultat suivant (démontré par Mayer-Wolf dans [Ma]) :
Si $P$ et $P'$ sont concaves, et les espaces libres sur $P$ et $P'$ sont isométriques, alors il existe une dilatation de $P$ sur $P'$.
Et nous connaissons beaucoup d'espaces concaves : en effet, on peut montrer que, si $(P, d)$ est un polonais, alors $(P, \sqrt{d})$ est concave (cf. [We]).

De façon intuitive, en remplaçant $d$ par $\sqrt{d}$ (qui est encore une distance, par concavité de $x \mapsto \sqrt{x}$, dont on voit aisément qu'elle définit une distance complète sur $X$ compatible avec sa topologie), on a "uniformément éliminé" les cas d'égalité dans l'inégalité triangulaire, et cela permet de maîtriser les isométries de l'espace libre sur $P$.
On peut donner une interprétation physique (cf [We]) de cette opération : si $(X, d)$ est une variété riemannienne complète connexe, alors $\sqrt{d(x,y)}$ correspond, à une constante multiplicative près, au temps que met un mobile ponctuel pour aller de $x$ à $y$, avec une accélération constante, en étant immobile à l'état initial.
Ce qui est très utile pour nos constructions est que, si $(P, d)$ et $(P', d')$ sont deux polonais, alors $(P, d)$ et $(P', d')$ sont isométriques si, et seulement si, $(P, \sqrt{d})$ et $(P', \sqrt{d'})$ le sont ; on peut donc réduire l'isométrie entre polonais à l'isométrie entre polonais concaves.
Comme celle de Holmes, avec laquelle elle a d'ailleurs plusieurs points com-

muns, la preuve du résultat de Mayer-Wolf, même dans le cas particulier de $(X, \sqrt{d})$, est trop longue pour être présentée ici.
La raison pour laquelle Weaver emploie le mot "concave" se trouve dans la question suivante, posée dans [We] :

Soit $K$ une partie compacte d'un espace euclidien qui rencontre chaque droite en au plus deux points. Est-ce que $K$ est concave au sens de Weaver ?

## 7.3 Calcul de la complexité

Le théorème précédent donne une idée sur la façon d'associer à un polonais $P$ de diamètre fini un espace de Banach $\Phi(P)$, de telle sorte que, si $P$ et $P'$ ont même diamètre, et $\Phi(P)$ et $\Phi(P')$ sont isométriques, alors $P$ et $P'$ le soient également.
En d'autres termes, cela nous fournit un outil pour construire une réduction de la relation d'isométrie entre polonais de diamètre 1 (par exemple) à la relation d'isométrie entre espaces de Banach séparables.
Pour voir plus facilement que la construction est borélienne, on introduit une nouvelle façon de coder les polonais.

Suivons Vershik [Ve1] et Clemens [Cl] et définissons l'espace des *codes d'espaces polonais* comme l'ensemble $\mathcal{M}$ des éléments $\mathbf{d} = (d_{i,j})$ de $\mathbb{R}^{\omega\times\omega}$ tels que :

$$\begin{aligned}
&(1)\quad \forall i, j\ d_{i,j} \geq 0;\\
&(2)\quad \forall i\ d_{i,i} = 0;\\
&(3)\quad \forall i, j\ d_{i,j} = d_{j,i};\\
&(4)\quad \forall i, j, k\ d_{i,k} \leq d_{i,j} + d_{j,k}.
\end{aligned}$$

A un code $\mathbf{d} = (d_{i,j})$, on fait correspondre le polonais $(P, d)$ qui est le complété de $\mathbb{N}$ muni de la distance $d(i, j) = d_{i,j}$ (après avoir quotienté par la relation $(i \sim j) \Leftrightarrow (d_{i,j} = 0)$, ce qui permet de coder également les espaces métriques finis ; dans la suite, on peut considérer pour simplifier qu'on ne considère que des codes tels que $d_{i,j} \neq 0$ pour tout $i \neq j$).

L'ensemble $\mathcal{M}$ ainsi défini est fermé dans $\mathbb{R}^{\omega\times\omega}$ (muni de la topologie produit) ; muni de la topologie induite, c'est donc un espace polonais.
On vérifie facilement que la relation d'isométrie entre codes $\simeq_i^c$ est analytique.

Les raisonnements de [GaKe] et [Cl] permettent de vérifier que $\simeq_i^d$ et la relation $\simeq_i^{\mathbb{U}}$ d'isométrie entre fermés de $\mathbb{U}$ se réduisent boréliennement l'une à l'autre ; selon le cas, l'une ou l'autre est plus facile à utiliser, c'est pourquoi on a introduit l'ensemble $\mathcal{M}$.

Remarquons que, si $(X, d_X)$ et $(Y, d_Y)$ sont deux espaces métriques, alors $(X, d_X)$ et $(Y, d_Y)$ sont isométriques si, et seulement si, $(X, \frac{d_X}{1+d_X})$ et $(Y, \frac{d_Y}{1+d_Y})$ le sont.

De plus, l'opération "$d \mapsto \frac{d}{1+d}$" est continue dans les codes : on voit donc que l'isométrie entre polonais se réduit à l'isométrie entre polonais bornés, et que l'isométrie entre polonais de diamètre infini se réduit à l'isométrie entre polonais de diamètre (exactement) 1.

Il n'est pas non plus difficile d'associer continûment (dans les codes) un espace polonais $\Phi(X)$ non borné à un polonais borné $X$, de façon à ce que $\Phi(X)$ et $\Phi(Y)$ soient isométriques si, et seulement si, $X$ et $Y$ le sont.
Par conséquent, la relation d'isométrie entre polonais se réduit à la relation d'isométrie entre polonais de diamètre (exactement) 1, donc cette dernière est universelle pour les relations induites par une action borélienne de groupe polonais.

**Remarque :** Les considérations précédentes sont à peu près évidentes ; l'intérêt pour nos constructions vient du fait que fixer le diamètre des polonais considérés permet de "transformer" les dilatations en isométries, ce qui simplifie considérablement la rédaction de la preuve ci-dessous.

Grâce à l'injectivité finie de $\mathbb{U}$, on peut associer boréliennement à tout code de polonais $\mathbf{d}$ un fermé $\Theta(\mathbf{d}) \subset \mathbb{U}$ isométrique au polonais codé par $\mathbf{d}$, de telle façon que

$$\mathbf{d} \simeq_i^c \mathbf{d}' \Leftrightarrow \Theta(\mathbf{d}) \simeq_i \Theta(\mathbf{d}) \ .$$

(La construction de cette application est détaillée dans l'Appendice).

De plus, les résultats de Gao et Kechris [GaKe] permettent de montrer qu'on peut supposer que $\Theta$ est en fait telle que $\mathbf{d} \simeq_i^c \mathbf{d}' \Leftrightarrow \Theta(\mathbf{d}) \simeq_i^{\mathbb{U}} \Theta(\mathbf{d})$ .
(L'idée est qu'on peut utiliser la construction de Katětov pour associer boréliennement à chaque $F \in \mathcal{F}(\mathbb{U})$ un fermé $F'$ isométrique à $F$, et plongé dans $\mathbb{U}$ comme la copie de $F$ obtenue en appliquant la construction de Katětov).

On peut donc construire une application borélienne $\Phi_0$, définie sur l'ensemble des codes de polonais de diamètre (exactement) 1, et à valeurs dans $\mathcal{F}(\mathbb{U})$, telle que :
- Si $\mathbf{d}$ code un polonais $(P,d)$, alors $\Phi_0(\mathbf{d})$ contient 0, et est isométrique à $(P,\sqrt{d})$.
- Si $\mathbf{d} \simeq_i^c \mathbf{d}'$ alors $\Phi_0(\mathbf{d}) \simeq_i^{\mathbb{U}} \Phi_0(\mathbf{d}')$.

Définissons ensuite $\Phi(\mathbf{d})$ comme l'enveloppe linéaire fermée de $\Phi_0(\mathbf{d})$ dans $<\mathbb{U}>$ ; $\Phi\colon \mathcal{M} \to \mathcal{F}(<\mathbb{U}>)$ est borélienne.
Le résultat de Mayer-Wolf évoqué plus haut permet de montrer que :

**Théorème 20.** *Étant donnés* $\mathbf{d}$, $\mathbf{d}'$ *codant deux polonais* $P$, $P'$ *de diamètre (exactement)* 1, *les assertions suivantes sont équivalentes :*
*(1)* $P$ *et* $P'$ *sont isométriques.*
*(2)* $\Phi(\mathbf{d})$ *et* $\Phi(\mathbf{d}')$ *sont isométriques .*
*(3) Il existe une isométrie linéaire de* $<\mathbb{U}>$ *qui envoie* $\Phi(\mathbf{d})$ *sur* $\Phi(\mathbf{d}')$.

**Preuve :**
(2) $\Rightarrow$ (1) est une conséquence directe du résultat de Mayer-Wolf cité ci-dessus. En effet, si $\Phi(\mathbf{d}) \simeq_i \Phi(\mathbf{d})$, alors $\Phi_0(\mathbf{d})$ et $\Phi_0(\mathbf{d}')$ sont isométriques (puisqu'ils sont concaves, et de même diamètre) ; la définition de $\Phi_0$ entraîne alors que $(P,\sqrt{d})$ et $(P',\sqrt{d'})$ sont isométriques, et donc que $P$ et $P'$ le sont également.
(3) $\Rightarrow$ (2) est trivial, et (1) $\Rightarrow$ (3) est une conséquence du fait qu'une isométrie de $\mathbb{U}$ envoyant $\Phi_0(\mathbf{d})$ sur $\Phi_0(\mathbf{d}')$ s'étend en une isométrie affine $\psi$ de $<\mathbb{U}>$ qui envoie l'enveloppe linéaire de $\Phi_0(\mathbf{d})$ sur celle de $\Phi_0(\mathbf{d}')$.
Par conséquent, il existe une isométrie affine de $\mathbb{U}$ qui envoie $\Phi(\mathbf{d})$ sur $\Phi(\mathbf{d}')$, ce qui entraîne qu'il existe en fait une isométrie linéaire qui envoie $\Phi(\mathbf{d})$ sur $\Phi(\mathbf{d}')$. La fonction $\Phi$ définit donc une réduction de la relation d'isométrie entre polonais de diamètre (exactement) 1 à la relation d'isométrie linéaire entre espaces de Banach séparables. $\Diamond$

**Corollaire 21.** *La relation d'isométrie entre espaces de Banach séparables est bi-réductible boréliennement à la relation universelle pour les relations induites par une action borélienne d'un groupes polonais.*

On peut remarquer que la démonstration ci-dessus permet également de montrer que l'action (par translation à gauche) du groupe d'isométries linéaires de $<\mathbb{U}>$ sur l'ensemble des sous-espaces fermés de $<\mathbb{U}>$ (qui est un borélien standard) est également bi-réductible boréliennement à la relation universelle pour les relations induites par une action de groupe polonais.

# APPENDICE

Afin d'être aussi complet que possible, on développe ici certains arguments de nature descriptive qu'il ne semblait pas utile de faire figurer en détail dans le corps de la thèse. La plupart de ces arguments sont basés sur des manipulations simples, mais un peu fastidieuses, de la structure borélienne d'Effros.
Celle-ci tire son intérêt (où, si l'on veut, sa définition) du fait qu'il existe des *sélecteurs* boréliens, i.e. des applications boréliennes $f\colon \mathcal{F}(X) \to X$ telles que $f(F) \in F$ pour tout fermé $F$ de $X$. En fait, on a même le résultat fondamental suivant, cf. [Ke1] :

**Théorème.** *(Kuratowski-Ryll-Nardzewski) Il existe une suite de fonctions boréliennes $d_n\colon \mathcal{F}(X) \to X$ telles que, pour tout fermé non vide $F$ de $X$, $\{d_n(F)\}$ est dense dans $F$.*

On utilisera l'existence de sélecteurs boréliens pour donner des preuves complètes des résultats du chapitre 7 ; pour l'instant, on détaille la démonstration du fait qu'on peut construire une réduction borélienne de la relation d'isomorphisme entre graphes dénombrables à la relation de conjugaison entre isométries de $\mathbb{QU}$.

**Démonstration détaillée du théorème 14.**

Il s'agit simplement de "coder" convenablement la démonstration (dont on reprend les notations). Commençons par rappeler que $\mathcal{M}$ désigne l'espace des codes de polonais.
Puisque nous travaillons ici avec des espaces métriques dénombrables, considérons cette fois chaque $\mathbf{d} \in \mathcal{M}$ comme codant un certain métrique dénombrable ($\mathbb{N}$, muni de la distance induite par $\mathbf{d}$, que l'on note simplement dans la suite $(\mathbb{N}, \mathbf{d})$). Pour simplifier la rédaction dans la suite, on ne considère que des codes $\mathbf{d}$ tels que $\mathbf{d}(i,j) \neq 0$ pour tout $i \neq j$, et on note $\mathcal{M}_{\mathbb{QU}}$ l'ensemble des codes tels que l'espace associé est isométrique à $\mathbb{QU}$ ; la caractérisation de $\mathbb{QU}$ par la propriété d'extension rationnelle permet de vérifier simplement que $\mathcal{M}_{\mathbb{QU}}$ est un borélien de $\mathcal{M}$.

Rappelons qu'on peut munir tout graphe dénombrable $G$, d'ensemble de sommets $\mathbb{N}$, de la distance $d$ définie par

$$d(i,j)=0 \text{ si } i=j,\ d(i,j)=1 \text{ si } (i,j)\in G,\ \text{ et } d(i,j)=2 \text{ sinon.}$$

Alors, $(G,d)$ et $(G',d')$ sont isométriques si, et seulement si, $G$ et $G'$ sont isomorphes.
Appelons $\mathcal{G}$ l'espace des codes de graphes dénombrables, i.e le sous-ensemble (borélien) de $\mathcal{M}$ constitué par les éléments qui codent un espace métrique isomorphe à un graphe muni de cette distance.

La démonstration se décompose en trois étapes :
Tout d'abord, on code la construction des espaces $X_i$ en utilisant des matrices de distance : partant d'un code $\mathbf{d}\in\mathcal{G}$, on obtient $\mathbf{d}'$ qui code $\mathbb{QU}$, et dans lequel on sait "reconnaître" les points des différents $X_i$.
Ensuite, on construit un outil pour passer de l'espace des codes à $\mathbb{QU}$ ; pour cela, on définit une application $\Psi\colon \mathcal{M}_{\mathbb{QU}}\to(\mathbb{QU})^{\mathbb{N}}$ telle que
(i) $\mathbf{d}\mapsto\Psi(\mathbf{d})$ est borélienne ;
(ii)$\Psi(\mathbf{d})$ est une isométrie de $(\mathbb{N},\mathbf{d})$ sur $\mathbb{QU}$.
On conclut en utilisant ce codage pour définir une isométrie $\varphi(\mathbf{d})\in Iso(\mathbb{QU})$ de façon que l'application $\mathbf{d}\mapsto\varphi(\mathbf{d})$ induise une réduction borélienne de l'isomorphisme entre graphes dénombrables à la relation de conjugaison entre isométries de $\mathbb{QU}$.

Pour mener à bien le premier pas de la preuve, on commence par fixer une bijection $<.,.,.>\colon \mathbb{N}\times\mathbb{N}\times\mathbb{Z}\to\mathbb{N}$, de réciproque $(\tau_0,\tau_1,\tau_2)$, ainsi qu'une bijection $\sigma=(\sigma_0,\sigma_1)\colon\mathbb{N}\to\mathbb{N}\times\mathbb{Z}$.
On se donne également une énumération de

$$E=\{((i_1,\dots,i_n);(q_1,\dots,q_n))\colon n\geq 1,\ \forall j\ i_j\in\mathbb{N} \text{ et } q_j\in\mathbb{Q}\}.$$

On note par exemple $E=\{\alpha_m\}_{m\in\mathbb{N}}$.
Soit $\mathbf{d}\in\mathcal{G}$ (l'espace des "codes de graphes dénombrables") ; on commence par "recopier" l'espace $X_0$ codé par $\mathbf{d}$ dans $\mathbf{d}'$, en posant

$$\forall i,j\in\mathbb{N}\ \mathbf{d}'(<0,\sigma_0(i),\sigma_1(i)>,<0,\sigma_0(j),\sigma_1(j)>)=\mathbf{d}(i,j)\ .$$

Ensuite, on "remplit $\mathbf{d}'$ niveau par niveau" : on commence par coder $X_1$, puis $X_2$, etc.
Pour cela, supposons que $p\in\mathbb{N}$ est tel que $\mathbf{d}'(<k,i,l>,<k',i',l'>)$ soit défini pour tous $k,k'\leq p$, tous $i,i'\in\mathbb{N}$, et tous $j,j'\in\mathbb{Z}$, et que toutes les applications $\mathbf{d}\mapsto\mathbf{d}'(<k,i,l>,<k',i',l'>)$ soient boréliennes (c'est clairement le cas au rang $p=0$) ; autrement dit, on a défini $\mathbf{d}'$ sur une sous-partie

de $\mathbb{N}$ de telle façon que l'espace associé soit $X_p$, et on veut maintenant coder $X_{p+1}$.
Pour cela, on va indiquer comment définir $\mathbf{d}'(< k,i,l >, < k',i',l' >)$ pour tous $k,k' \leq p+1$, $i,i' \in \mathbb{N}$, et $j,j' \in \mathbb{Z}$. Cette procédure suffira à définir $\mathbf{d}'$.
Pour définir $X_{p+1}$, on utilise toutes les fonctions de $E(X_p,\omega,\mathbb{Q})$, une fois chacune ; l'énumération de l'espace $E$ nous permet de faire cela de façon borélienne.
Si $\alpha = ((i_1,\ldots,i_n);(q_1,\ldots,q_n)) \in E$, et $\tau_0(i_j) \leq p$ pour tout $p$, on note

$$\alpha \in E(\{i_1,\ldots,i_n\},\mathbf{d}')$$

si $\alpha$ induit une fonction de Katětov sur $\{< \tau_0(i_j),\tau_1(i_j),\tau_2(i_j) >\}_{1\leq j\leq n}$ muni de la distance induite par $\mathbf{d}'$.
On voit alors que, pour tout $\alpha = ((i_1,\ldots,i_n);(q_1,\ldots,q_n)) \in E$, la relation

$$R(\mathbf{d},\alpha) \Leftrightarrow \forall j \leq n \ \tau_0(i_j) \leq p \text{ et } i_j \mapsto q_j \in E(\{i_1,\ldots,i_n\},\mathbf{d}')$$

est borélienne en $\mathbf{d}$.
Par conséquent, $\mathbf{d} \mapsto n_0(\mathbf{d}) = \min\{m\colon R(\mathbf{d},\alpha_m)\}$ est borélienne. On note $\alpha_{n_0(\mathbf{d})} = ((i_1,\ldots,i_n);(q_1,\ldots q_n))$, et on pose maintenant, pour tout $k \leq p$ :

$$\mathbf{d}'(< p+1,0,0 >, < k,i,j >) = \min_{r=1,\ldots,n}\{q_r + \mathbf{d}'(< \psi_0(i_r),\psi_1(i_r),\psi_2(i_r) >, < k,i,j >)\} .$$

On définit aussi, pour tout $k \leq p$,

$$\mathbf{d}'(< p+1,0,l >, < k,i,j >) = \mathbf{d}'(< p+1,0,0 >, < k,i,j-l >) .$$

Enfin, on définit $\mathbf{d}'(< p+1,0,l >, < p+1,0,l' >)$ comme étant égal à

$$\min_{k\leq p, i\in\mathbb{N}, j\in\mathbb{Z}}\{\mathbf{d}'(< p+1,0,l >, < k,i,j >) + \mathbf{d}'(< p+1,0,l' >, < k,i,j >)\} .$$

Ceci permet d'étendre la définition de $\mathbf{d}'$ à
$\big(\{< k,i,j >\colon k \leq p,\ i \in \mathbb{N},\ j \in \mathbb{Z}\} \cup \{< p+1,0,l >\colon l \in \mathbb{Z}\}\big)^2$, et chacune des applications coordonnée qu'on a définies est borélienne.
Pour finir la construction, supposons que l'on a défini $\mathbf{d}'$ sur
$\big(\{< k,i,j >\colon k \leq p,\ i \in \mathbb{N},\ j \in \mathbb{Z}\} \cup \{< p+1,i,l >\colon i \leq I,\ l \in \mathbb{Z}\}\big)^2$, et que à chaque étape on a une fonction borélienne $\mathbf{d} \mapsto \alpha(i)(\mathbf{d})$ qui "marque" quel point de $E$ on a déjà pris en compte pour prolonger $\mathbf{d}'$ ( autrement dit, on a déjà rajouté les orbites correspondant aux fonctions de Katětov codées par $\alpha_{n_0(\mathbf{d})},\ldots,\alpha_{n_I(\mathbf{d})}$). On note $T_p(\mathbf{d},\alpha,\beta)$ pour signifier que $\alpha,\beta \in E$ ne codent pas la même fonction sur $X_p$ (autrement dit, sur l'ensemble des $< k,j,l >$

avec $k \leq p$, $j \in \mathbb{N}$ et $l \in \mathbb{Z}$, muni de la distance induite par $\mathbf{d}'$).
On pose alors $n_{I+1}(\mathbf{d}) = \min\{n \in \mathbb{N}\colon R(\mathbf{d},\alpha) \text{ et } \forall i \leq I \ T_p(\mathbf{d},\alpha,\alpha_{n_i(\mathbf{d})})\}$ .
Cette fonction est borélienne, et on utilise comme ci-dessus $\alpha_{n_{I+1}(\mathbf{d})}$ pour étendre la définition de $\mathbf{d}'$ à
$\big(\{< k,i,l >\colon k \leq p,\ i \in \mathbb{N},\ l \in \mathbb{Z}\} \cup \{< p+1,i,l >\colon i \leq I+1,\ l \in \mathbb{Z}\}\big)^2$ .

Si on pose $\mathbf{d}' = \Phi(\mathbf{d})$, ce procédé suffit à garantir que $\Phi\colon \mathcal{G} \to \mathcal{M}$ est borélienne.
Chacun des "niveaux" $\{< k,j,l >\colon k \leq p,\, j \in \mathbb{N},\, l \in \mathbb{Z}\}$ ainsi définis code l'espace $X_p$ de la preuve du théorème 14, en particulier on voit que $\Phi(\mathbf{d}) \in \mathcal{M}_{\mathbb{QU}}$.

Fixons maintenant une énumération de $\mathbb{QU} = \{q_n\}_{n\in\mathbb{N}}$. On veut trouver une application $\Psi$ qui permette de "transférer" notre construction dans $\mathbb{QU}$, comme expliqué au début de cette preuve.
Pour cela, on utilise la méthode de va-et-vient : aux rangs pairs, on envoie isométriquement les points de $(\mathbb{N},\mathbf{d})$ dans $\mathbb{QU}$, et aux rangs impairs on s'assure que tous les points de $\mathbb{QU}$ sont bien obtenus comme image d'un certain $n \in \mathbb{N}$.
Commençons par poser $n_0(\mathbf{d}) = 0$ pour tout $\mathbf{d} \in \mathcal{M}_{\mathbb{QU}}$, et $\Psi(\mathbf{d})(0) = q_0$.
Supposons maintenant avoir construit $k$ applications boréliennes $\mathbf{d} \mapsto n_i(\mathbf{d})$ $(i = 0,\dots,k-1)$ telles que $n_i(\mathbf{d}) \neq n_j(\mathbf{d})$ pour tout $i \neq j \leq k-1$, et que $\Psi(\mathbf{d})$ soit définie en $n_0(\mathbf{d}),\dots,n_{k-1}(\mathbf{d})$, de telle façon que $\mathbf{d} \mapsto \Psi(\mathbf{d})(n_i(\mathbf{d}))$ soit borélienne pour tout $i \in [0,k-1]$.
Pour définir $n_k(\mathbf{d})$ et $\Psi(\mathbf{d})(n_k(\mathbf{d}))$, on distingue selon la parité de $k$.
Si $k+1$ est impair, on commence par poser

$$p = \min\{j\colon \forall k' \leq k-1 \ \Psi(\mathbf{d})(n_{k'}(\mathbf{d})) \neq q_j\}$$

(Autrement dit, on cherche le plus petit $p$ tel que $q_p$ n'a pas encore été atteint par $\Psi(\mathbf{d})$). Ensuite, on pose

$$n_k(\mathbf{d}) = \min\{n\colon \forall k' \leq k-1 \ \mathbf{d}(n,n_{k'}(\mathbf{d})) = d(q_p,\Psi(\mathbf{d})(n_{k'}(\mathbf{d}))\} \ ,$$

et on définit $\Psi(\mathbf{d})(n_k(\mathbf{d})) = q_p$.
Si $k+1$ est pair, on pose cette fois

$$n_k(\mathbf{d}) = \min\{n\colon \forall k' \leq k-1 \ n \neq n_{k'}(\mathbf{d})\} \ , \text{ puis}$$

$$p = \min\{j\colon \forall k' \leq k-1 \ \mathbf{d}(\Psi(\mathbf{d})(n_{k'}(\mathbf{d})),q_j) = \mathbf{d}(n_{k'}(\mathbf{d}),n_k(\mathbf{d}))\} \ .$$

Enfin, on pose $\Psi(\mathbf{d})(n_k(\mathbf{d})) = q_p$.

Cela permet de définir $\Psi(\mathbf{d})$ sur $\mathbb{N}$ tout entier, de façon à ce que les applications $\mathbf{d} \mapsto \Psi(\mathbf{d})(n_k(\mathbf{d}))$ soient boréliennes pour tout $k \in \mathbb{N}$.
Par conséquent, puisque $\mathbf{d} \mapsto n_k(\mathbf{d})$ est borélienne pour tout $k \in \mathbb{N}$, on voit que pour tout $n \in \mathbb{N}$ les applications $\mathbf{d} \mapsto \Psi(\mathbf{d})(n)$ sont boréliennes, autrement dit, que l'application $\mathbf{d} \mapsto \Psi(\mathbf{d})$ est borélienne (de $\mathcal{M}_{\mathbb{QU}}$ dans $\mathbb{QU}^{\mathbb{N}}$). Par construction, $\Psi(\mathbf{d})$ induit bien une isométrie de $(\mathbb{N}, \mathbf{d})$ sur $\mathbb{QU}$.

Finalement, il ne reste plus qu'à définir l'isométrie $\varphi(\mathbf{d})$ associée à un code $\mathbf{d} \in \mathcal{G}$ : le codage est fait pour que cela soit simple, il suffit en effet de poser $(\varphi(\mathbf{d})(q) = q')$ si, et seulement si,

$$\begin{cases} q = \Psi \circ \Phi(\mathbf{d})(< 0, i, j >) & \text{et } q' = q, \\ \text{ou} & \\ \exists k > 0\, q = \Psi \circ \Phi(\mathbf{d})(< k, i, j >) & \text{et } q' = \Psi \circ \Phi(\mathbf{d})(< k, i, j+1 >)) \ . \end{cases}$$

Il est clair que l'application $\mathbf{d} \mapsto \varphi(\mathbf{d})$ est borélienne, et code bien l'isométrie de la preuve du théorème 14 . $\Diamond$

**Preuve que $F \mapsto \overline{\mathbf{Vect}(F)}$ est une application borélienne de $\mathcal{F}(B)$ dans $\mathcal{F}(B)$ pour tout Banach séparable $B$.**

Fixons une suite de fonctions boréliennes $d_n \colon \mathcal{F}(B) \to B$ telles que $d_n(F)$ est dense dans $F$ pour tout fermé $F$ non vide de $B$.
Soit $U$ un ouvert de $B$ ; alors l'enveloppe linéaire fermée de $F$ rencontre $U$ si, et seulement si, l'enveloppe linéaire de $\{d_n(F)\}_{n \in \mathbb{N}}$ rencontre $\mathbb{U}$. Par conséquent, on voit que

$$\left(\overline{\mathrm{Vect}(F)} \cap U \neq \emptyset\right) \Leftrightarrow \left(\exists n\, \exists q_1, \ldots, q_n \in \mathbb{Q}\, \exists k_1, \ldots, k_n \in \mathbb{N} \sum_{i=1}^{n} q_i d_{k_i}(F) \in U\right)$$

(Le fait de pouvoir trouver $q_1, \ldots, q_n \in \mathbb{Q}$ comme ci-dessus est une conséquence directe de la continuité de l'addition).
La partie de droite de l'équivalence est borélienne puisque les fonctions $d_n$ le sont, par conséquent $\{F \in \mathcal{F}(B) \colon \overline{\mathrm{Vect}(F)} \cap U \neq \emptyset\}$ est borélien .
En particulier, on voit que, si $\mathbb{U}$ est plongé dans $F(\mathbb{U})$ comme au chapitre 7, alors, puisque $\mathcal{F}(\mathbb{U})$ est borélien dans $\mathcal{F}(F(\mathbb{U}))$, l'application $F \mapsto \overline{\mathrm{Vect}(F)}$ est borélienne de $\mathcal{F}(\mathbb{U})$ dans $\mathcal{F}(F(\mathbb{U}))$. $\Diamond$

**Construction de l'application $\Theta$ du chapitre 7.**
Rappelons que nous souhaitons construire une application borélienne $\Theta$, définie sur l'ensemble $\mathcal{M}$ des codes de polonais et à valeurs dans $\mathcal{F}(\mathbb{U})$, telle

que pour tout code $\mathbf{d}$ $\Theta(\mathbf{d})$ soit isométrique au polonais codé par $\mathbf{d}$. Pour simplifier, on ne considère encore que des codes $\mathbf{d}$ tels que $\mathbf{d}(i,j) \neq 0$ pour tout $i \neq j$.
Si $n \geq 0$ et $\mathbf{d} \in \mathcal{M}$, notons $E_n(\mathbf{d})$ l'espace métrique $\{1, \ldots, n\}$, muni de la distance induite par $\mathbf{d}$.
Alors, on construit par récurrence une suite de fonctions boréliennes $f_n \colon \mathcal{M} \to \mathbb{U}$ telles que $\{f_0(\mathbf{d}), \ldots, f_n(\mathbf{d})\}$, muni de la distance de $\mathbb{U}$, soit isométrique à $E_n(\mathbf{d})$, l'isométrie étant réalisée par l'application $f_i(\mathbf{d}) \mapsto i$. On peut alors poser

$$\Theta(\mathbf{d}) = \overline{\{f_n(\mathbf{d})\}} \ ,$$

et il est clair que $\Theta$ est borélienne, et $\Theta(\mathbf{d})$ est isométrique au polonais codé par $\mathbf{d}$.
On commence par poser $f_0(\mathbf{d}) = 0$ (rappelons que $0 \in \mathbb{U}$ ; pour l'instant, il n'y a aucune condition à vérifier, donc on peut décider que tous les $\Theta(\mathbf{d})$ contiennent 0).
Supposons maintenant avoir construit $f_0, \ldots, f_n$ ; pour construire $f_{n+1}$, l'idée naturelle serait de considérer l'application

$$\Psi_n \colon \mathbf{d} \mapsto \{z \in \mathbb{U} \colon \forall i \leq n \ d(z, f_n(\mathbf{d})) = \mathbf{d}(n, n+1)\} \ \in \mathcal{F}(\mathbb{U}) \ ,$$

puis de prouver que cette application est borélienne. Ensuite, si $s$ est un sélecteur pour $\mathcal{F}(\mathbb{U})$, il ne resterait plus qu'à poser $f_{n+1} = s \circ \Psi_n$.
Le problème est que, si $\Psi_1$ est bien borélienne (cela se vérifie facilement, en utilisant le fait que $\mathbb{U}$ est localement connexe), on (en tout cas, l'auteur) ne voit pas bien pourquoi $\Psi_n$ serait borélienne en général. Cela nous contraint à utiliser un argument d'approximation. Pour le formaliser, introduisons une notation : pour tout $n \geq 1$, on appelle $\mathcal{A}_n$ l'ensemble des $\big((x_1, \ldots x_n); M; \varepsilon\big)$ tels que :
(a) $x_i \in \mathbb{U}$ ;
(b) $M \in \mathbb{R}^{(n+1)^2}$, $M(i,j) = M(j,i)$, $M(i,j) = d(x_i, x_j)$ si $i, j \leq n$, et $x_i \mapsto M(n+1, i) \in E(\{x_1, \ldots, x_n\})$ ;
(c) $\varepsilon > 0$.

Alors, le lemme suivant, dont la démonstration est immédiate, nous fournit un outil suffisant pour développer l'argument d'approximation.

**Lemme.** *Pour tout $n \geq 1$, $\mathcal{A}_n$ est un borélien de $\mathbb{U}^n \times \mathbb{R}^{(n+1)^2} \times \mathbb{R}$, et l'application : $\mathcal{A}_n \to \mathcal{F}(\mathbb{U})$ définie par*

$$((x_1, \ldots, x_n); M; \varepsilon) \in \mathcal{A}_n \mapsto \{z \in \mathbb{U} \colon \ \forall i \leq n \ |d(z, x_i) - M(n+1, i)| \leq \varepsilon\}$$

*est borélienne.*

Pour construire $f_{n+1}$ ($f_0, \dots, f_n$ étant déjà construites), on utilise alors la même idée que pour montrer que tout espace complet ayant la propriété d'extension approximative a la propriété d'extension finie : on peut en effet utiliser le lemme pour construire par récurrence une suite d'applications boréliennes $g_i \colon \mathcal{M} \to \mathbb{U}$ telles que

(i) $\forall \mathbf{d}\ \forall i \in \mathbb{N}\ \forall k \in [0,n]\ |d(g_i(\mathbf{d}), f_k(\mathbf{d})) - \mathbf{d}(n+1,k)| \leq \dfrac{1}{2^i}$ ;

(ii) $\forall \mathbf{d}\ \forall i \in \mathbb{N}\ d(g_i(\mathbf{d}), g_{i+1}(\mathbf{d})) \leq \dfrac{1}{2^{i-1}}$ .

Pour obtenir $g_0$, il suffit de remarquer que l'application de $\mathcal{M}$ dans $\mathcal{A}_n$ définie par

$$\mathbf{d} \mapsto \big((f_0(\mathbf{d}), \dots, f_n(\mathbf{d})); \mathbf{d}_{|\{0 \leq i,j \leq n+1\}}; 1\big)$$

est borélienne, et à valeurs dans $\mathcal{A}_{n+1}$ ; le lemme, ainsi que l'existence de sélecteurs pour $\mathcal{F}(\mathbb{U})$, permettent alors de construire $g_0$.
Supposons maintenant avoir construit $g_0, \dots, g_i$ ; pour $0 \leq k, l \leq n+2$ définissons $M_{k,l}(\mathbf{d})$ par

$$\begin{aligned}
M_{k,l}(\mathbf{d}) = &\ \mathbf{d}(k,l) \text{ si } k,l \leq n;\\
M_{k,n+1}(\mathbf{d}) = &\ d(f_k(\mathbf{d}), g_i(\mathbf{d})) \text{ si } k \leq n;\\
M_{k,n+2}(\mathbf{d}) = &\ M_{n+2,k}(\mathbf{d}) = \mathbf{d}(k,n+1) \text{ si } k \leq n;\\
M_{n+1,n+2}(\mathbf{d}) = &\ \sup\{|d(g_i(\mathbf{d}), f_k(\mathbf{d})) - \mathbf{d}(n+1,k)| \colon 0 \leq k \leq n\};\\
M_{n+1,n+1}(\mathbf{d}) = &\ M_{n+2,n+2}(\mathbf{d}) = 0.
\end{aligned}$$

Il est clair que $\mathbf{d} \mapsto M(\mathbf{d}) = (M_{i,j}(\mathbf{d}))_{0 \leq i,j \leq n+2}$ est borélienne, par conséquent

$$\mathbf{d} \mapsto \big((f_0(\mathbf{d}), \dots, f_n(\mathbf{d}), g_i(\mathbf{d})); M(\mathbf{d}); \frac{1}{2^{i+1}}\big)$$

est borélienne.
Les distances codées dans $M(\mathbf{d})$ permettent d'assurer les conditions (i) et (ii) ci-dessus ; par conséquent, le lemme et l'existence de sélecteurs boréliens permettent d'obtenir $g_{i+1}(\mathbf{d})$ qui satisfait à ces conditions.

Ceci suffit à définir la suite $(g_i(\mathbf{d}))$, qui est de Cauchy dans $\mathbb{U}$ par construction, et il ne nous reste plus qu'à poser $f_{n+1}(\mathbf{d}) = \lim\limits_{i \to +\infty} g_i(\mathbf{d})$ .

$\Diamond$

# BIBLIOGRAPHIE


[BK1] H.Becker et A.S Kechris, *The Descriptive Set Theory of Polish Group Actions*, London Math. Soc. Lecture Notes Series, 232, Cambridge University Press (1996).

[BK2] H.Becker et A.S Kechris, *Borel actions of Polish groups*, Bull. of the AMS 28 (2), pp 334-341 (1993).

[Bl] L.M Blumenthal, *Theory and Applications of Distance Geometry*, Chelsea Publ. Co, Bronx, NY (1970).

[CV] P.J Cameron and A.M Vershik, *Some isometry groups of Urysohn space*, preprint (2004).

[Cl] J.D Clemens, *Descriptive Set Theory, Equivalence Relations, and classification problems in analysis*, thèse de doctorat, Berkeley, (2001).

[CGK] J.D Clemens, S. Gao et A.S Kechris, *Polish metric spaces, their classification and isometry groups*, Bulletin of Symbolic Logic 7 , no. 3, 361-375 (2001).

[Ch] J.P.R Christensen, *Topology and Borel Structure*, North Holland Math. Studies, 10, North Holland (1974).

[DJK] R. Dougherty, S. Jackson et A.S Kechris, *The structure of hyperfinite Borel equivalence relations*, Trans. Amer. Math. Soc. 341, pp 193-225 (1994).

[Fr] R. Fraïssé, *Sur l'extension aux relations de quelques propriétés des graphes*, Ann. Sci. Ecole Norm. Sup. 71, pp 363-388 (1954).

[GaKe] S. Gao et A.S Kechris, *On the classification of Polish metric spaces up to isometry*, Memoirs of Amer. Math. Soc., 766, Amer. Math. Soc. (2003).

[GoKa] G. Godefroy, N.J Kalton, *Lipschitz-free Banach spaces*, Studia Math. 159 (2003).

[Gr] M. Gromov, *Metric Structures for Riemannian and Non-Riemannian spaces.* Birkauser, pp 78-85(1998).

[Hj] G. Hjorth, *Classification and Orbit Equivalence Relations*, Mathematical Surveys and Monographs 75, Amer. Math. Soc., Providence, RI (2000).

[Hod] W. Hodges, *Model Theory*, Cambridge University Press (1993).

[Hol] M.R Holmes, *The universal separable metric space of Urysohn and isometric embeddings thereof in Banach spaces*, Fund. Math. 140, pp 199-223 (1992).

[Hu] G.E Huhunaišvili, *On a property of Uryson's universal metric space*(en russe), Dokl. Akad. Nauk. USSR (N.S), 101, pp 332-333 (1955).

[JKL] S. Jackson, A.S Kechris et A. Louveau, *On Countable Borel Equivalence Relations*, J. Math. Logic 2(1) , pp 1-80 (2002).

[Kal] N. Kalton, *Extending Lipschitz maps in $C(K)$ spaces*, preprint (2005).

[Kat] M. Katětov, *On universal metric spaces*, Proc. of the 6th Prague Topological Symposium (1986), Frolik (ed). Helderman Verlag Berlin, pp 323-330 (1988).

[Ke1] A.S Kechris, *Classical descriptive set theory*, Springer-Verlag (1995).

[Ke2] A.S Kechris, *New directions in descriptive set theory*, Bull. Symb. Logic 5(2), pp 161-179 (1999)

[Ke*] A.S Kechris, correspondance privée.

[KPT] A.S Kechris, V. Pestov and S. Todorcevic, *Fraïssé limits, Ramsey theory, and topological dynamics of automorphism groups*, Geom. Funct. Anal. 15, pp 106-189 (2005).

[Li] J. Lindenstrauss, *Extensions of compact operators* , Mem. Amer. Math. Soc. 48, p 112 (1964).

[Ma] E. Mayer-Wolf, *Isometries between Banach spaces of Lipschitz functions*, Israel J. Math 38, pp 58-74 (1981).

[Me1] J. Melleray, *Stabilizers of closed sets in the Urysohn space*, à paraître aux Fundamenta Mathematicae.

[Me2] J. Melleray, *Compact groups are isometry groups of compact metric spaces*, preprint, soumis (2005).

[Me3] J. Melleray, *On the geometry of Urysohn's universal metric space*, preprint, soumis (2005).

[Me4] J. Melleray, *Computing the complexity of isometry between separable Banach spaces*, preprint, soumis (2005).

[Ng] L. Nguyen Van The, *Ramsey Degrees of finite ultrametric spaces, ultrametric Urysohn spaces, and dynamics of their isometry groups*, preprint (2004).

[We] J. E West, *Open Problems in Infinite Dimensional Topology*, in *Open Problems in Topology*, J. van Mill and G.M Reed (Editors), Elsevier, p. 570 (1990).

[Pe1] V.Pestov, *Ramsey-Millman phenomenon, Urysohn metric spaces, and extremely amenable groups*, Israel J. Math. 127, pp 317-358 (2002).
(corrigendum à paraître (2005)).

[Pe2] V. Pestov, *Dynamics of infinite-dimensional groups and Ramsey-type phenomena*, Publicações dos Colóquios de Matemática, IMPA, Rio de Janeiro, à paraître (2005).

[Si] W. Sierpinski, *Sur un espace métrique universel*, Fund. Math. 33, pp 115-122 (1945).

[Ur] P.S Urysohn, *Sur un espace métrique universel*, Bull. Sci. Math 51 (1927), pp 43-64 and 74-96.

[Us1] V.V Uspenskij, *A universal topological group with a countable basis*, Funct. Anal. and its Appl. 20, pp86-87 (1986).

[Us2] V.V Uspenskij, *On the group of isometries of the Urysohn universal metric space*, Comment. Math. Univ. Carolinae, 31(1), pp 181-182 (1990).

[Us3] V.V Uspenskij, *Compactifications of topological groups*, Proc. of the 9th Prague Topological Symposium (2001), pp 331-346.

[Us4] V.V Uspenskij *The Urysohn Universal Metric Space is homeomorphic to a Hilbert Space* , Topology Appl. 139(1-3) (2004) pp 145-149.

[Ve1] A.M Vershik, *The universal Urysohn space, Gromov metric triples and random metrics on the natural numbers*, Russ. Math. Surveys, 53(5), pp 921-928 (1998).

[Ve2] A.M Vershik, *The universal and random metric spaces*, Russian Math. Surveys 356, pp 65-104 (2004).

[We] N.Weaver, *Lipschitz Algebras*, World Scientific Publishing Co. Inc., River Edge, NJ, (1999).